CECyTE Campeche

Trabajos Colegiados Estatales Virtuales

CÁLCULO DIFERENCIAL

Gabriel Enrique Peralta Horta
Silvia Eduviges Villegas Ávalos
Helbert Andrei Guzmán Cámara

PRESENTACIÓN

Querido alumno:

En la familia CECyTEC tenemos un gran compromiso, la enorme tarea de que ustedes, nuestros alumnos, logren sus metas y sus objetivos. Con estos libros de trabajo estamos dándoles las herramientas que les permitan desarrollar sus conocimientos y habilidades para tener un buen desempeño académico.

Dedícate tiempo de manera inteligente para desarrollar tus habilidades y destrezas. Ten muy claras tus metas. Recuerda que solo con educación podemos construir un futuro prometedor, un mejor país, un mejor estado, un mejor municipio y una mejor familia.

Aprende a soñar. Lucha por tus sueños. Te auguro que serás siempre un triunfador.

¡Estás a muy poco de lograr el éxito!

Mtra. Margarita Nelly Duarte Quijano

Directora General del CECyTEC

Libro de Trabajo
Febrero - Julio 2022

Cálculo Diferencial

Primer Parcial

Plantel: _____

Nombre del Alumno: _____

Carrera: _____

Semestre:_____ Grupo:_____

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Campeche

Eje: Pensamiento y lenguaje variacional.

Componentes: Cambio y predicción: elementos del cálculo.

Contenido central: Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición. Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.

Contenido específico:

- El tratamiento de las representaciones del cambio en distintos contextos. Tablas, gráficas, texto, expresión oral, movimiento físico, funciones y derivadas. ¿Cómo represento el cambio? ¿Puedo representar mi posición en una gráfica dependiente del tiempo? ¿Qué es el cambio y qué la variación?
- Intervalos de monotonía, funciones crecientes y decrecientes. ¿Si una función pasa de crecer a decrecer hay un punto máximo en el medio? ¿Al revés, un punto mínimo? ¿Así se comporta la temperatura en mi ciudad durante todo el día?
- ¿Se pueden sumar las funciones?, ¿Qué se obtiene de sumar una función lineal con otra función lineal?, ¿una cuadrática con una lineal?, ¿Se le ocurren otras?

Aprendizajes esperados:

AE1. Caracteriza a las funciones algebraicas y las funciones trascendentes como herramientas de predicción, útiles en una diversidad de modelos para el estudio del cambio.

AE2. Construye y analiza sucesiones numéricas y reconoce los patrones de crecimiento y de decrecimiento.

AE3. Analiza las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función.

AE4. Opera algebraica y aritméticamente, representa y trata gráficamente a las funciones polinomiales básicas (lineales, cuadráticas y cúbicas).

Apertura

Antes de iniciar nuestro estudio de **Cálculo Diferencial** es necesario recordar todo lo que ya sabemos acerca de la **recta numérica** y los **números reales**.

❖ Investiga en libros o páginas de internet y responde las siguientes preguntas:

¿Qué es la recta numérica?

_____

_____

_____

_____

_____

¿Qué son los números reales?

_____

_____

_____

_____

_____

Como te habrás dado cuenta, existen varias definiciones para cada uno de los conceptos que investigaste, sin embargo, todos coinciden en diferentes puntos.

Aquí te proponemos las siguientes definiciones:

- La **recta numérica** es la representación gráfica y ordenada del conjunto de los **números reales**.
- Los **números reales** (representados por la letra **R**) son el conjunto de números creados por el hombre para poder transmitir, mediante un lenguaje unificado, distintas cantidades, expresadas por una serie de símbolos y 10 dígitos. En otras palabras, los **números reales** son todos los números que existen. ¡Todos! Desde los números enteros, los positivos, los negativos, los que pueden escribirse como una fracción (racionales) y los que no pueden escribirse como una fracción (irracionales).

Algo importante que debes recordar es que los números son **infinitos**. Teniendo esto en cuenta, es momento de mencionar una propiedad de los **números reales** llamada: **densidad**.

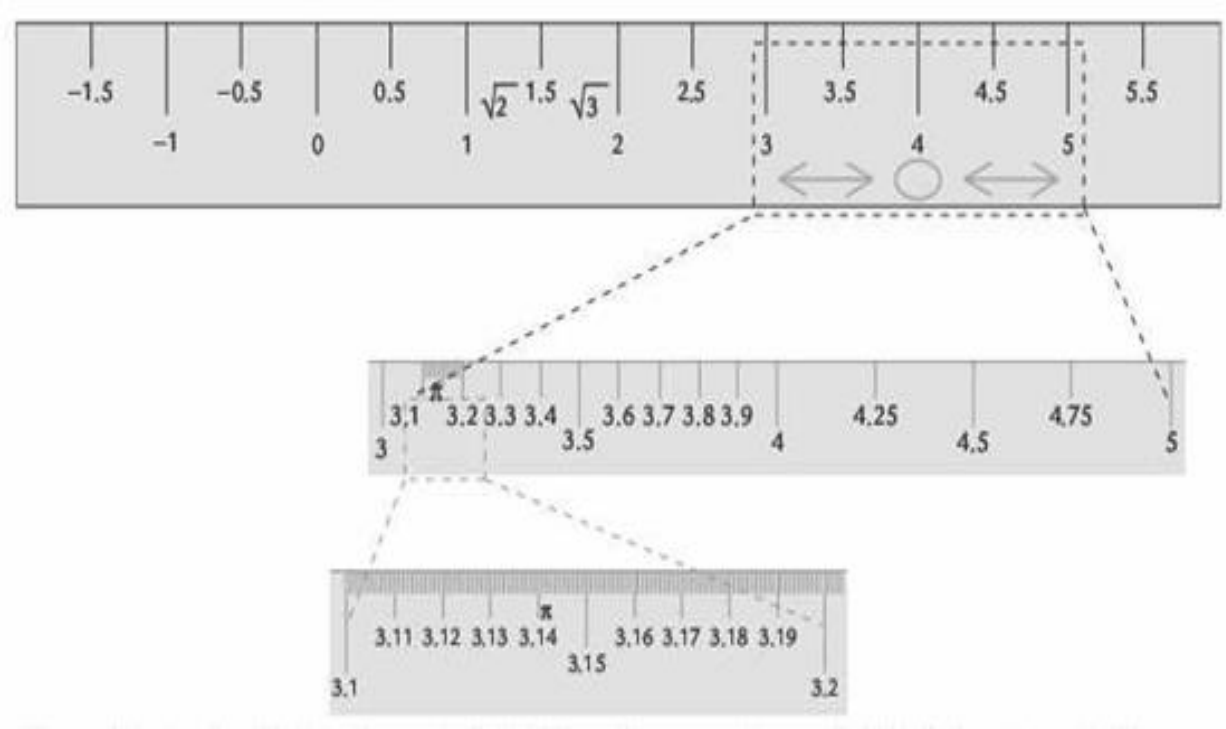
La **densidad** es la propiedad de los números reales que indica que, por más cerca que se encuentren un par de números, siempre existe un conjunto infinito de números reales entre ellos. Dicho de otra forma, **entre dos números cualesquiera siempre existirá un número entre ellos**.

Para comprender esto, imaginemos que tenemos la **recta numérica** y que en ella hemos representado dos números enteros, digamos el **3** y el **5**. Si preguntamos ¿qué número está entre el 3 y el 5? probablemente la mayoría contestaría inmediatamente que el **4**.

Pero la respuesta anterior no es la única respuesta correcta, porque también se encuentran: **3.1**, **3.2**, **3.5**, **4.5**, **4.7**, entre otros.

Sin embargo, si pudiéramos acercarnos a la recta numérica con una lupa, podríamos observar que entre **3** y **3.1** existe otra sucesión infinita de números: **3.01**, **3.02**, **3.03**, etc.

¡Pero esto no acaba ahí! Pues entre **3.01** y **3.02** se encuentran: **3.011**, **3.012**, **3.013**, ..., y así sucesivamente, en una ola interminable de números que veríamos cada vez que acercamos la lupa.



Otra cosa que debemos considerar es que, debido al orden que brinda la **recta numérica**, podemos observar fácilmente cuál número **es mayor o menor**, dependiendo de cuál se encuentra a la izquierda y cuál a la derecha. **El que está a la derecha es más grande que el que está a la izquierda**.

Para poder representar este tipo de **comparaciones** de forma más sencilla, haremos uso de los siguientes símbolos:

Símbolo	Significa	Ejemplos
>	"Mayor que". Indica que un número es mayor que otro (está ubicado a la derecha del otro número en la recta numérica).	10 **>** 4 -2 **>** -5 7 **>** -3
<	"Menor que". Indica que un número es menor que otro (está ubicado a la izquierda del otro en la recta numérica).	0 **<** 1 -20 **<** -4 13 **<** 30

Otros símbolos son:

Símbolo	Significa
≤	Menor o igual que
≥	Mayor o igual que
≠	Diferente de

- Coloca el símbolo que representa la comparación correcta entre los siguientes pares de números:

15 _____ 25

-8 _____ -10

-1 _____ 0

50 _____ 50

4 _____ -120

Ahora bien, es importante que sepas que estos símbolos nos ayudan no solo a realizar comparaciones entre números, sino también a escribir **intervalos**. Pero, ¿qué es un intervalo?

Un **intervalo** es un **conjunto definido de valores que tienen un orden**; además, el intervalo está **delimitado entre 2 números**: uno “más pequeño” y uno “más grande” a los que llamaremos extremos y los representaremos con las letras **a** y **b**.
Existen tres maneras de representar intervalos:

1. Notación de intervalos.

2. Desigualdades.

3. Gráficamente.

Observa y estudia los siguientes cuadros:

Equivalencia / Tipos	Notación de intervalos	Desigualdades	Gráficamente	Significa o se lee
Abierto	(a, b)	$a < x < b$		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, sin incluir **a** ni **b**.
Cerrado	[a, b]	$a \leq x \leq b$		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, inclusive **a** y **b**.
Semiabierto extremo a	(a, b]	$a < x \leq b$		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, inclusive **b** pero no **a**.
Semiabierto extremo b	[a, b)	$a \leq x < b$		Todos los números comprendidos entre **a** y **b**, inclusive **a** pero no **b**.

	Intervalo	Descripción	Gráfica	Ejemplo
Cerrado	[a, b]	Conjunto de números x tales que $a \le x \le b$	(incluye puntos extremos)	[0, 10]
Abierto	(a, b)	Conjunto de números x tales que $a < x < b$	(excluye puntos extremos)	(−1, 5)
Semiabierto	(a, b]	Conjunto de números x tales que $a < x \le b$		(−3, 1]
	[a, b)	Conjunto de números x tales que $a \le x < b$		[−4, −1)
Infinito	[a, +∞)	Conjunto de números x tales que $a \le x$		[0, +∞)
	(a, +∞)	Conjunto de números x tales que $a < x$		(−3, +∞)
	(−∞, b]	Conjunto de números x tales que $x \le b$		(−∞, 0]
	(−∞, b)	Conjunto de números x tales que $x < b$		(−∞, 8)
	(−∞, +∞)	Conjunto de todos números reales		(−∞, +∞)

Ahora, analiza los siguientes ejemplos de intervalos:

Ejemplo	Tipo de Intervalo	Desigualdad	Significado
(-4, 5)	Abierto	**$-4 < x < 5$**	"Todos los números que están entre **-4** y **5**, sin incluirlos a ellos". En este intervalo podemos encontrar los siguientes números: **-3.999999**, **-3.5**, **-2**, **-1**, **0**, **1**, **2.2**, **4**, **4.99999999999999**, entre otros; pero **no se encuentran -4 ni 5**.
[-10, 2]	Cerrado	**$-10 \le x \le 2$**	"Todos los números que están entre **-10** y **2**, incluyéndolos a ellos". En este intervalo podemos encontrar los siguientes números: **-10**, **-9.999999**, **-9.9**, **-9**, **-7**, **-2**, **0**, **1**, **1.5**, **1.999999**, **2**, entre otros.
(0, 25]	Semiabierto en el extremo inferior	**$0 < x \le 25$**	"Todos los números que están entre **0** y **25**, incluyendo 25, **pero no 0**". En este intervalo podemos encontrar los siguientes números: **0.00000001**, **0.1**, **0.2**, **0.5**, **1**, **5**, **8.7**, **13**, **22**, **24.99999999**, **25**, entre otros; pero **no se encuentra 0**.
[-20, -5)	Semiabierto en el extremo superior	**$-20 \le x < -5$**	"Todos los números que están entre el **-20** y el **-5**, incluyendo -20, **pero no -5**".

			En este intervalo podemos encontrar los siguientes números: **-20**, **-19.999999**, **-19.9**, **-10**, **-7**, **-6**, **-5.9**, **-5.4**, **-5.1**, **-5.0000001**, entre otros; pero **no se encuentra -5**.
(-∞, 0)	Abierto	**x < 0**	"Todos los números menores que 0". Dicho de otra manera: son los números que están entre **"menos infinito"** y **0** (sin incluirlo). En este intervalo podemos encontrar números como: **-1000000000000**, **-4000**, **-200**, **-10**, **-6**, **-4**, **-2**, **-1**, **-0.1**, **-0.000000001**, entre otros; pero **no se encuentra 0**.
[8, ∞)	Semiabierto en el extremo superior	**x ≥ 8**	"Todos los números mayores que **8** (incluyéndolo)". Dicho de otra manera: son todos los números que están entre **8** y **"más infinito"**, incluyendo **8**. En este intervalo podemos encontrar números como: **8**, **8.0000001**, **40**, **100**, **20000**, **400000000**, **10000000000**, entre otros.

Nota importante:

Como habrás notado, en los últimos dos ejemplos hacemos uso del símbolo de **infinito** ∞ para indicar una sucesión infinita de números, por lo que no existe un número específico que podamos considerar como **extremo.**

Por eso es importante mencionar que **siempre se va a usar paréntesis del lado donde se encuentra el símbolo** ∞ Nunca corchete.

−∞ se lee como: **"menos infinito"**.

∞ (también escrito **+** ∞), se lee como: **"más infinito"**.

Considera el siguiente intervalo:

(−∞, ∞)

¿Qué números crees que comprende?

_____

_____

Si pensaste en "todos los números", entonces estás en lo correcto. En este intervalo podemos encontrar **todos los números reales**, ya que abarca desde el **"menos infinito"**

hasta el **"más infinito"**. Observa que se hace uso de **paréntesis** en ambos lados del intervalo.

- Escribe en forma de **intervalo** el conjunto de números descrito en la frase:

Frase	Intervalo
"Todos los números que están entre -10 y 9, sin incluirlos a ellos".	
"Todos los números que están entre 2 y 30, incluyéndolos a ambos".	
"Todos los números que están entre -12 y 8, incluyendo -12, pero no 8**".**	
"Todos los números que están entre el -7 y el 0, incluyendo 0, pero no -7**".**	
"Todos los números menores que -5".	
"Todos los números mayores que 4 (incluyéndolo)".	

Desarrollo

1. Funciones

1.1. Conceptos básicos

a) Variable

Es una letra que representa un valor numérico desconocido. Se representa con las últimas letras del alfabeto (p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z), normalmente **"x"** o **"y"**. Por ejemplo, x + 2 = 3, aquí "x" es una variable cuyo valor es 1.

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

VARIABLE

Una variable puede ser **dependiente** o **independiente**.

Una variable es **independiente** cuando esta no depende de otras variables. Mientras que una variable **dependiente**, depende de una o más.

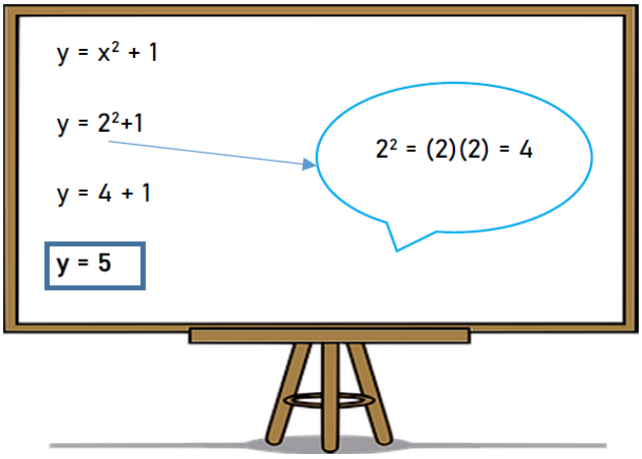
Por ejemplo, en la ecuación cuadrática **= x² + 1**. Aquí, la letra **"y"** está en función de **x**. La letra **"y"** además es una variable **dependiente**, cuyo valor depende de los valores que tome **"x"**. Mientras que **"x"** es **independiente**, ya que "x" puede tomar cualquier valor.

Ejemplo:

$$\boxed{y = x^2 + 1}$$

La variable "y" es la dependiente ya que el valor que tendrá depende del valor que tenga la variable independiente "x".

En este ejemplo si la variable "x" vale 2, la variable dependiente "y" tendrá el valor de 5.



b) Constante

Una **constante** es un valor fijo. En matemáticas, una constante es una magnitud que no cambia con el paso del tiempo. Es un número por sí solo y algunas veces se representa con las primeras letras del alfabeto (a, b, c, d, etc.). Ejemplos:

1. x + 5 = 9, **5** y **9** son constantes
2. x + a = 6, **a** y **6** son constantes

Analiza la siguiente situación:

María y Rafa están haciendo un viaje por carretera, como están circulando por una autopista muy buena, han podido ir con una magnitud de velocidad de 100km/h durante la última media hora.

Como a lo largo de la última media de hora de viaje la velocidad ha sido la misma, podemos decir que, la velocidad del coche de María y Rafa ha sido una **constante**.

1.2. Definición, evaluación y representación

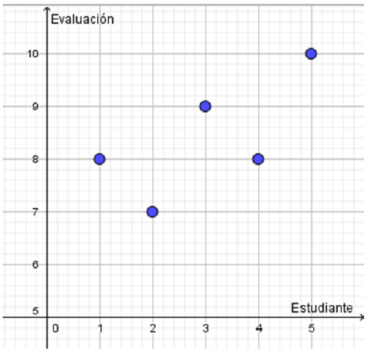
a) Definición

Para poder definir una función, es necesario comprenderla primero.

Analiza la siguiente situación: Al preguntar a cinco estudiantes qué resultado obtuvieron en su evaluación del primer parcial en la asignatura de Cálculo Diferencial, se obtiene la siguiente tabla:

Estudiante	1	2	3	4	5
Evaluación	8	7	9	8	10

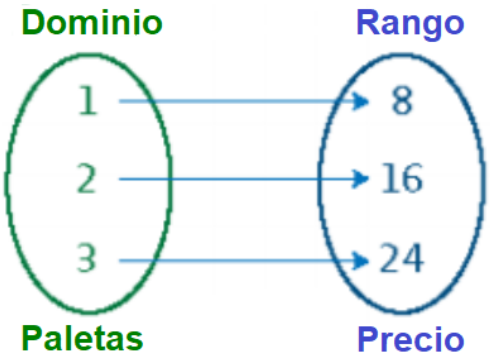
Observamos que a cada estudiante le corresponde solo un valor numérico de su evaluación.



Los valores de la tabla se pueden mostrar gráficamente; donde se observa que efectivamente a cada estudiante le corresponde solo un valor numérico de su evaluación. Decimos entonces que este tipo de relación corresponde a una **función**.

Una **función** es una relación entre los elementos de dos conjuntos donde a cada elemento de un conjunto **(dominio),** le corresponde un valor del otro conjunto **(imagen o rango)**.

La función generalmente se denota como $f(x)$ o y.



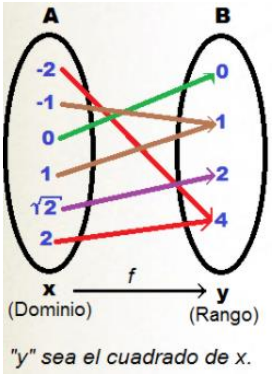
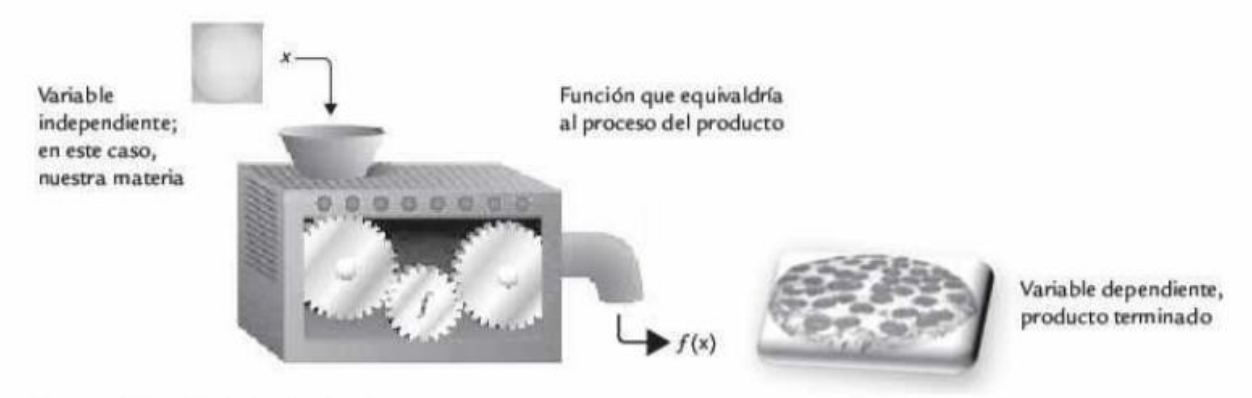


Diagrama sagital de funciones

También podemos pensar en la función como en una especie de máquina, a la cual le proporcionamos una **entrada** (materia prima) y después de realizar un cierto proceso, obtienes una **salida** (producto terminado).

Por ejemplo, pensemos en una máquina que llena frascos con jalea de frutas. Cada frasco que entra sale lleno con jalea de un solo tipo de fruta: jalea de fresa, jalea de uva, jalea de durazno, jalea de moras, etc.

De tal manera, que a cada frasco le corresponde **uno y solo uno** de los sabores de jalea. Entonces, diferentes frascos (valores de **x**) pueden tener un mismo sabor de jalea (valores de **y**), pero no puede ocurrir que un solo frasco (valores de **x**) contenga dos o más sabores (valores de **y**).



Todo esto lo podemos escribir en lenguaje algebraico utilizando la notación de funciones, que es la que nos permite distinguir la **variable dependiente** de la **independiente**. Se expresa de la siguiente manera:

- **f(x)** representa el nombre de la función (puede ser cualquier otra letra, pero por convención se denota con la letra **f**).
- Luego se escribe entre paréntesis la letra de la variable independiente **x**.
- Después del signo de igualdad **=** se escribe el resto del **modelo matemático**.

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 2$$

b) Evaluación de funciones

Hay diferentes tipos de funciones, y cada una se comporta de manera diferente. Si queremos conocer cómo se comporta una función, entonces tenemos que **evaluar** dicha función.

Evaluar una función significa **encontrar el valor** real que le corresponde a la **variable dependiente (y)**, una vez asignado un valor a la **variable independiente (x)**.

Para que podamos entender esto con mayor claridad, vamos evaluar la función anterior para diferentes valores de x.

- Si **x= -3**; entonces:

$$f(-3) = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$$

- Si **x= 0**; entonces:

$$f(0) = (0)^2 + 2 = 0 + 2 = 2$$

- Si **x= 3**; entonces:

$$f(3) = (3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$$

De esta manera podemos ir viendo el comportamiento de dicha función. Y claro está, mientras más valores le demos a la **variable independiente (x)**, más fácil será distinguir el comportamiento de la función que, en este caso, se trata de una **función cuadrática**, cuya gráfica es una **parábola**. Pero esto lo veremos más adelante.

c) Representación de funciones

Entonces, existen tres maneras de representar e identificar las funciones: **analítica**, **tabular** y **gráficamente**.

Cada una expresa la manera en que podemos **visualizar** los problemas reales utilizando **símbolos, datos ordenados o gráficos**, con el fin de poder comprender y analizar mejor las situaciones de un problema.

1. Analíticamente:

Representa el lenguaje matemático puro a través de símbolos y números que se expresan mediante una fórmula matemática.

$$f(x) = x^2$$

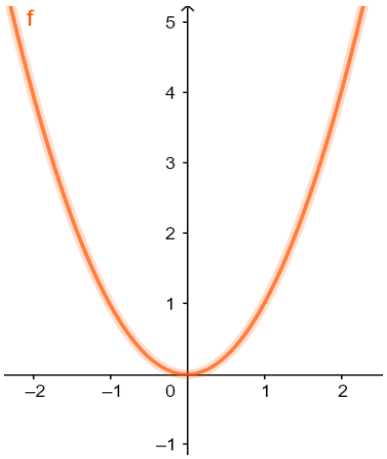
2. Tabularmente:

A través de un conjunto de pares ordenados **(x, y)**. Recuerda: a cada valor de **x** le corresponde un valor de **y**.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

3. Gráficamente:

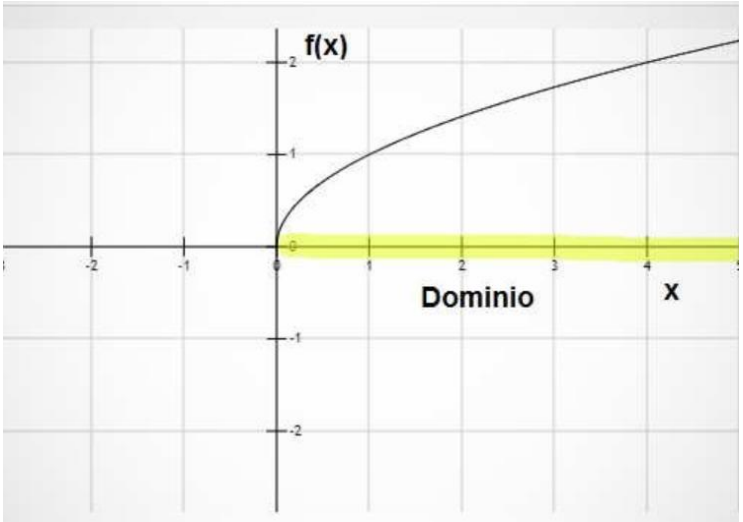
A través del dibujo de los pares ordenados (puntos con coordenadas **(x,y)**) en el plano cartesiano.



1.3. Dominio y rango de una función

a) Dominio

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente **"x"**. Gráficamente lo podemos ver en el eje horizontal **(abscisas)**, leyéndolo de la misma manera en que escribimos: de izquierda a derecha.



En la gráfica se observa que el **dominio** es la parte que hemos resaltado, y esta va **desde cero hasta infinito**. Escrito en forma de intervalo sería:

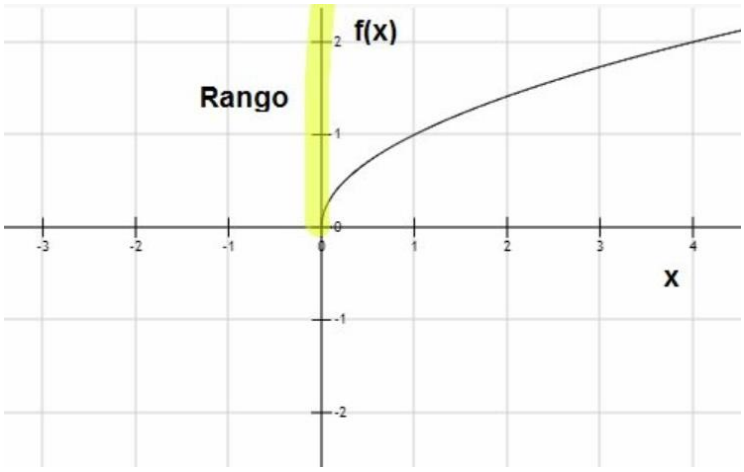
Dom f: [0,+∞).

Debemos considerar el cero, porque la función está definida en dicho punto, para ello usamos el **intervalo cerrado**.

b) Rango o imagen

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente **"y"**, *una vez asignados los valores a la variable independiente.*

La manera más efectiva de determinar el **rango** consiste en graficar la función y ver los valores que toma "**y**" de abajo hacia arriba.



Tomando como referencia esta gráfica, vemos que el **rango** es la parte que se ha resaltado y se define como:

Rango f: [0,+∞)

Del mismo modo que en el caso anterior, tenemos que considerar al cero, y para ello usamos el **intervalo cerrado**.

1.4. Clasificación de funciones

- **Funciones**
  - **Algebráicas**
    - **Polinómicas:** $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$
    - **Racionales:** $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x^2 - 1}$
    - **Irracionales:** $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$
  - **Transcendentes**
    - **Exponenciales:** $f(x) = 3^x$
    - **Logarítmicas:** $f(x) = \log_5 x$
    - **Trigonométricas:** $f(x) = \text{sen } 2x$

Las funciones algebraicas: son aquellas cuya regla corresponde a una expresión algebraica.

Las funciones trascendentales: corresponden a aquellos casos en los que la función no se puede definir por sus operaciones aritméticas.

1.4.1. Funciones algebraicas

Este tipo de funciones se subdividen a su vez en:

1. **Polinomiales**: están formadas por **polinomios**, donde el **grado** del polinomio lo determina el **mayor exponente** de la variable. Dicho exponente debe ser **entero y positivo**. Algunas funciones de este tipo son:
   - Funciones **constantes**
   - Funciones **lineales**
   - Funciones **cuadráticas**
   - Funciones **cúbicas**
2. **Racionales**
3. **Irracionales**

1.4.1.1. Funciones polinomiales

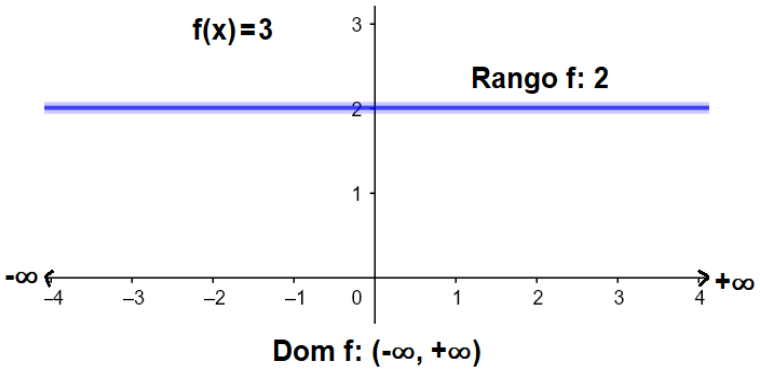
Son todas aquellas **funciones** formadas por **polinomios**, donde el **grado** del polinomio lo determina el mayor **exponente** de la variable. Su fórmula general es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde **n** es un número positivo y **a** es una constante real.

a) Función constante

Su modelo matemático es **f(x) = c** y su representación gráfica es una paralela al eje de las abscisas.



Su **dominio** son todos los números reales, el cual lo podemos representar como:

$\mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$. El **rango** o **imagen** es el valor de la constante **c**.

Otros ejemplos de **funciones constantes** son:

$$f(x) = 5, \qquad f(x) = \pi, \qquad f(x) = \frac{3}{5}, \qquad f(x) = -10.5$$

En todos estos ejemplos, su **dominio** corresponde a todos los números reales **(−∞, ∞)**; y su **rango** o **imagen** es el valor de la constante.

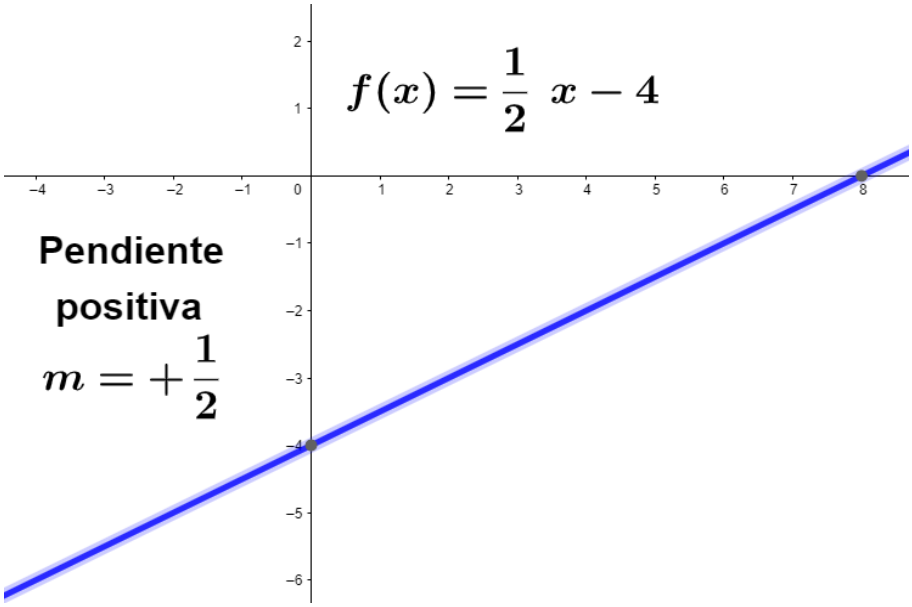
b) Función lineal

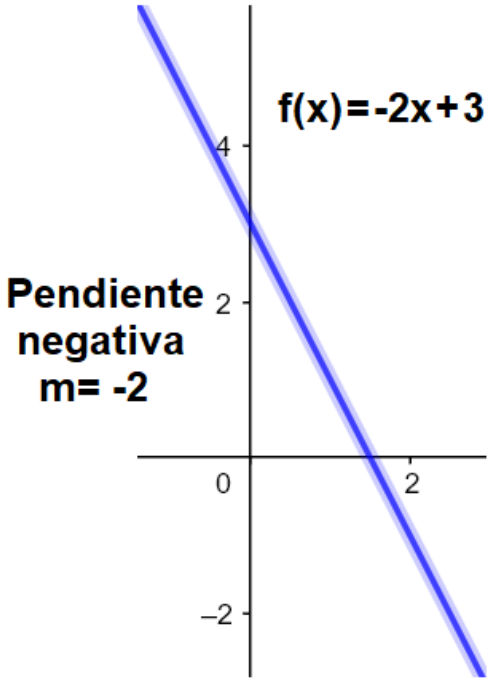
Su modelo matemático es **f(x) = mx + b** y su representación gráfica es una línea oblicua, es decir, una línea recta que no es vertical ni horizontal.

Los parámetros de la función lineal son la pendiente **m** y la ordenada en el origen **b**.

Su **dominio** son todos los números reales $\mathbb{R}$ o **(−∞, +∞)** y su **rango** también.

Observa los siguientes ejemplos de funciones lineales con sus gráficas:



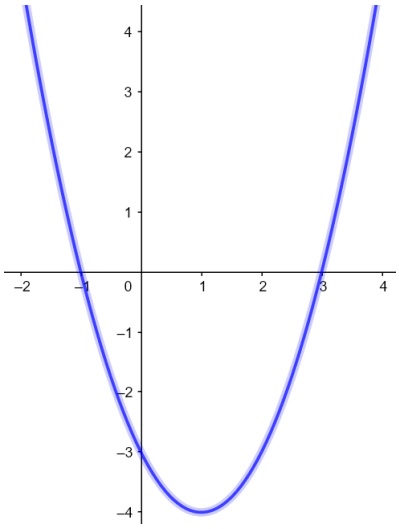


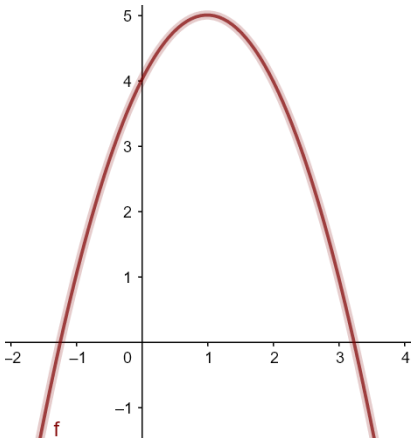
c) Función cuadrática

Su modelo matemático es: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ y su representación gráfica es una parábola.

Su **dominio** son todos los números reales $\mathbb{R}$ o $\boldsymbol{(-\infty, +\infty)}$ y el **rango** o **imagen** se puede obtener a partir del análisis de las coordenadas o de la gráfica.

Ejemplos de **dominio** y **rango** para funciones cuadráticas:

Función cuadrática	Gráfica	Dominio	Rango
$f(x) = x^2 - 2x - 3$		Es todo el conjunto de los números reales **Dom f:** $\mathbb{R}$ también se escribe **Dom f:** $\boldsymbol{(-\infty, +\infty)}$	El eje "Y" comienza a tomar valores (de abajo hacia arriba) a partir de -4, por lo que el Rango es: **Rango f: [- 4,+∞)**

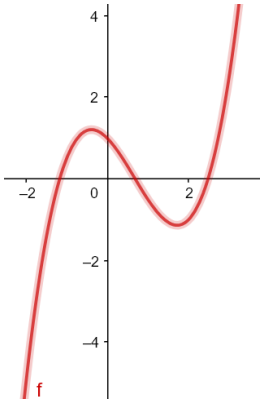
$f(x) = -x^2 + 2x + 4$		**Dom f:** $\mathbb{R}$ también se escribe **Dom f:** $(-\infty, +\infty)$	El eje "Y" comienza a tomar valores (de abajo hacia arriba) desde menos infinito y llega hasta el vértice de la parábola Y= 5, por lo que el Rango es: **Rango f: (-∞, 5]**

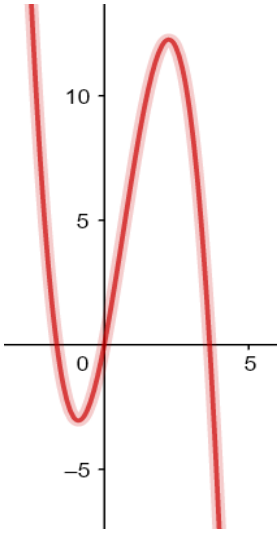
d) Función cúbica

Su modelo matemático es $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$.

Tanto el **dominio** como el **rango** de la función es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$.

Ejemplos de **dominio** y **rango** para funciones cúbicas:

Función cúbica	Gráfica	Dominio	Rango
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 1$		El Dominio es todo el conjunto de los números reales. **Dom f:** $(-\infty, +\infty)$	El Rango es todo el conjunto de los números reales. Seguimos el eje "Y" de abajo hacia arriba y podemos leer valores siempre. **Rango f:** $(-\infty, +\infty)$

$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 6x$		**Dom f:** $(-\infty, +\infty)$	**Rango f:** $(-\infty, +\infty)$

1.4.1.2. Funciones racionales

Tienen la forma: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $Q(x)$es diferente de cero. La mayoría de sus gráficas son hipérbolas.

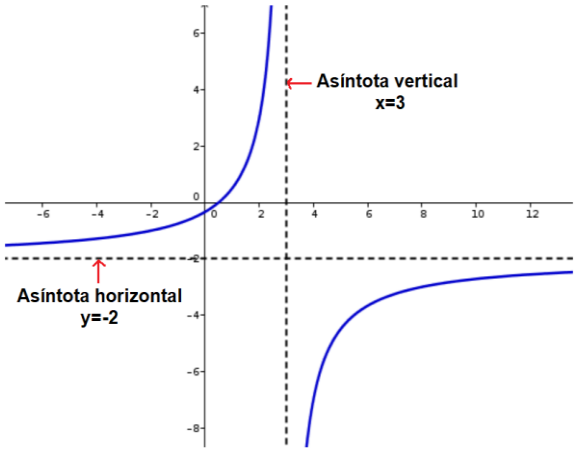
El **dominio** lo forman **todos los números reales** excepto ***los valores de x que anulan el denominador.***

Para calcular el dominio *se iguala el denominador a cero y se resuelve* esa ecuación, una vez resuelta esta ecuación **el dominio estará formado por todos los números reales excepto las soluciones de la ecuación**.

Las funciones racionales pueden tener **asíntotas horizontales y verticales**. Esto depende del numerador y el denominador de la función.

Una **asíntota** es una línea recta que se aproxima muy cerca de una curva, pero nunca la toca.

En la imagen de la derecha puedes observar una asíntota vertical y una asíntota horizontal correspondiente a la representación gráfica de una función racional.

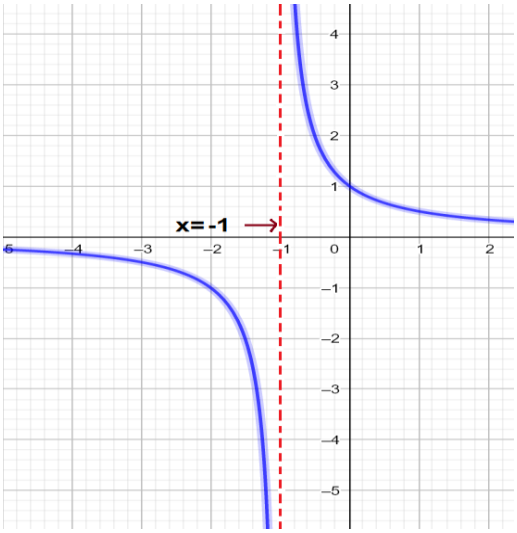


Ejemplo 1. Hallar el dominio y el rango de la función racional:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Se calcula la indeterminación o el valor que no puede tomar x, para lo cual se iguala a cero el denominador y se resuelve la ecuación:

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$



El **dominio** está formado por todos los números reales excepto el número 1: $\mathbb{R}$ **- {1}.** También se expresa como **(-∞, 1) U (1, +∞)**.

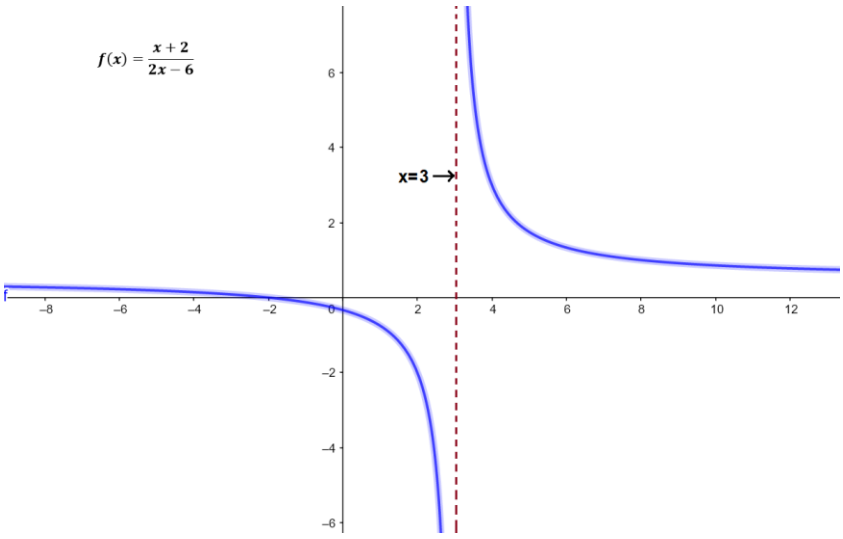
La gráfica de la función tiene una asíntota vertical (línea punteada) en el valor que **x NO PUEDE TOMAR**, es decir, x= -1.

De la gráfica también se puede obtener el rango de la función. Considerando que el único valor de **y** que no toma la función es y= 0, tenemos que el rango es: $\mathbb{R}$ **- {0}.**

Ejemplo 2. Hallar el dominio y el rango de la función racional $f(x) = \frac{x+2}{2x-6}$

Igualar el denominador a cero y resolver:

$$2x - 6 = 0$$
$$2x = 6$$
$$x = \frac{6}{2},$$
$$x = 3$$



El dominio está formado por todos los números reales excepto el número "3":

$\mathbb{R}$ **- {3}**.

El **dominio** también se puede expresar como:

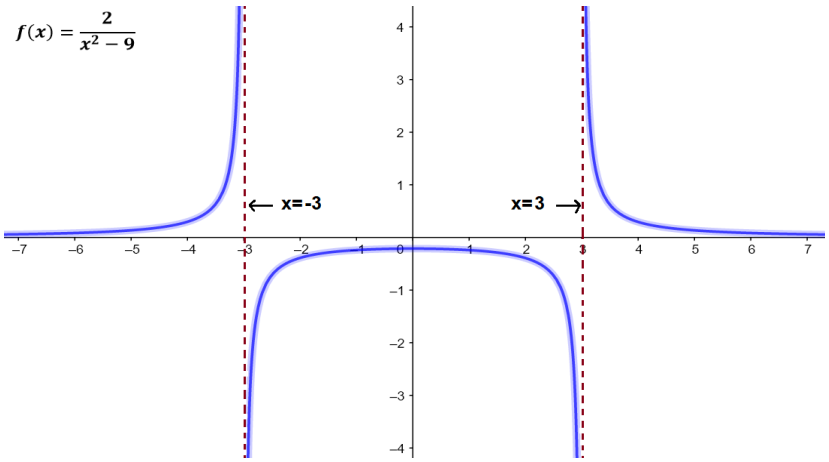
(-∞, 3) U (3, +∞)

Considerando que el único valor de **y** que no toma la función es y= 0.5, tenemos que el rango es: $\mathbb{R}$ **- {$\frac{1}{2}$}.**

Ejemplo 3. Hallar el dominio de la función racional $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$

Igualar el denominador a cero y resolver:

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$
$$x = \pm 3$$



El **dominio** está formado por todos los números reales excepto los números "-3" y "3":

$\mathbb{R}$ **- {-3, 3}**

También se puede expresar como **(-∞, -3) U (-3, 3) U (3, +∞)**

Considerando que el único valor de **y** que no toma la función es y= 0, tenemos que el rango es: $\mathbb{R}$ **- {**0**}.**

1.4.1.3. Funciones irracionales

Su expresión matemática **f(x)** presenta un radical: $\sqrt[n]{g(x)}$

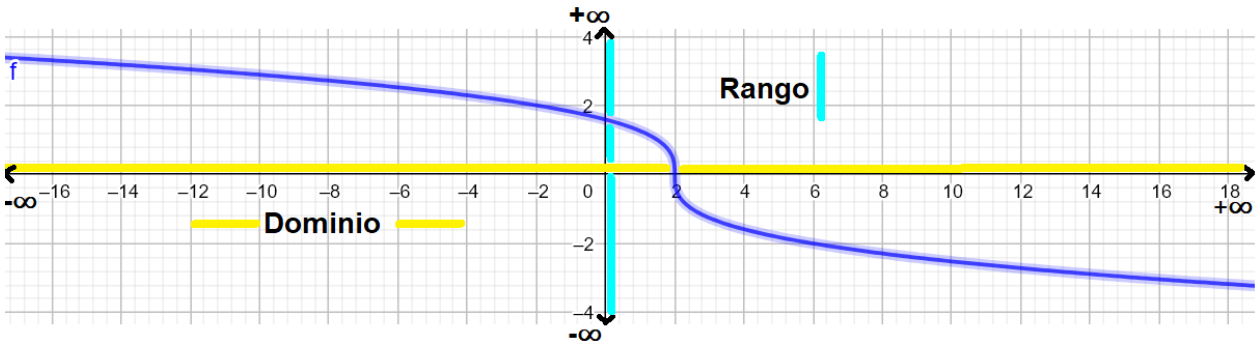
donde $g(x)$ es una función polinómica o una función racional y **n** es el índice de la raíz.

- Si el radical tiene un **índice impar**, entonces el dominio será todo el conjunto de los números reales $(-\infty, +\infty)$.
- Si el radical tiene un **índice par,** lo primero que debemos hacer es tomar lo que hay dentro de la raíz (radicando) y hacer que sea mayor o igual que cero, a continuación, se resuelve esa inecuación y la solución de dicha inecuación conforma el dominio de la función.

$$Radicando \geq 0$$
$$g(x) \geq 0$$

Ejemplo 1. Determinar el dominio y rango de la función $\sqrt[3]{-2x+4}$

Cómo se trata de una raíz de **índice par,** entonces el dominio será todo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$**.** También se expresa como: $(-\infty, +\infty)$.



El **rango** de la función es **(-∞, +∞).**

Ejemplo 2. Determinar el dominio de la siguiente función con radical $f(x) = \sqrt{2x+6}$

Cómo se trata de una raíz de **índice par** se resuelve la inecuación para hallar el dominio:

$$Radicando \geq 0$$

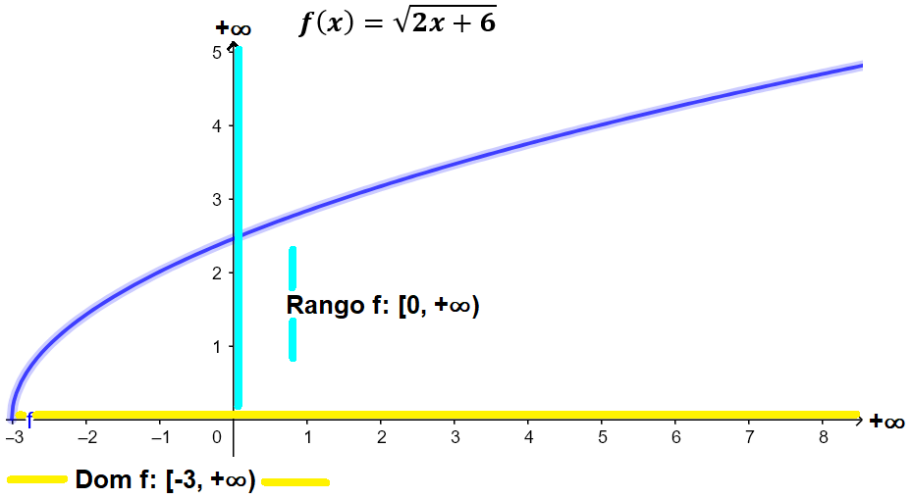
$$2x + 6 \geq 0$$

$$2x \geq -6$$

$$x \geq \frac{-6}{2}$$

$$x \geq -3$$

El dominio es Dom f: [-3,+∞)



Gráficamente se aprecia que el dominio corresponde al calculado.

A partir de la gráfica también se observa que el **rango** (valores que toma **y**) es:

[0, +∞)

Ejemplo 3. Determinar el dominio y rango de: $\sqrt{-2x+4}$

Como se trata de una raíz de **índice par** se resuelve la inecuación para hallar el dominio:

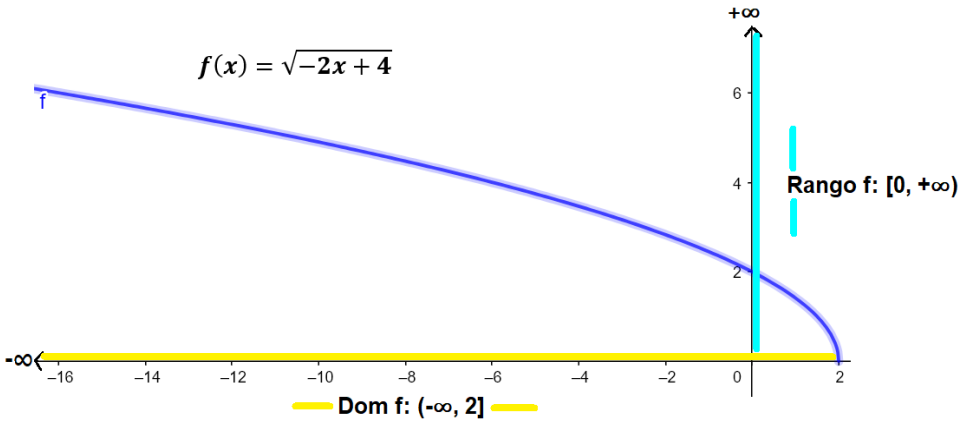
$$g(x) \geq 0$$
$$-2x+4 \geq 0$$
$$-2x \geq -4$$
$$x \leq \frac{-4}{-2}$$
$$x \leq 2$$

Observa que *se cambió el sentido de la desigualdad* (de ≥ cambió a ≤), esto es porque se dividió entre un número negativo.

Al resolver la desigualdad se obtuvo $x \leq 2$,entonces el dominio es**: (-∞, 2].**

En la gráfica se encuentra resaltado el **dominio** con color amarillo.

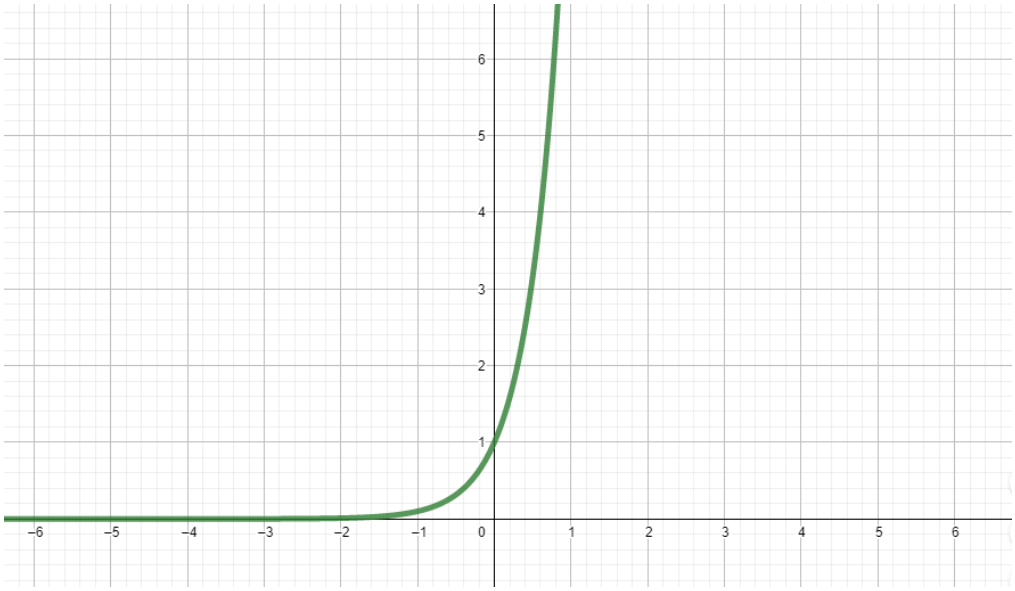
El **rango** es: **[0, +∞)**. En la gráfica se encuentra resaltado en color azul turquesa.



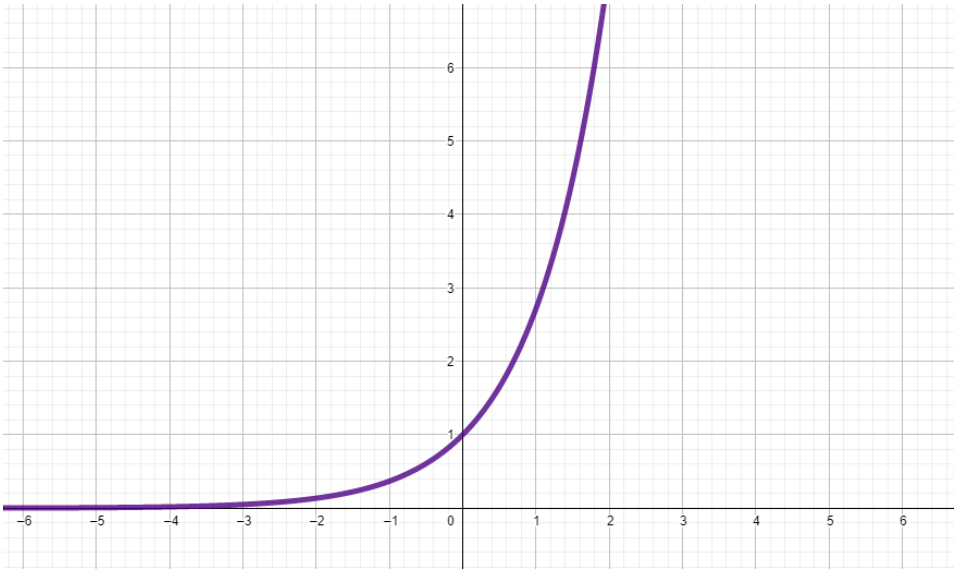
1.4.2. Funciones trascendentales

1.4.2.1. Funciones exponenciales

Una función exponencial se define de manera general como: $y = a^x$, donde **a** es la base de la función y una constante positiva. Las funciones exponenciales más utilizadas son:
a) $y = 10^x$,función exponencial de base **10**:



c) $y = e^x$**,** función exponencial de base **e**.



La **gráfica** de toda función exponencial pasa por el **punto (0,1)**.

El **dominio** son todos los números reales $\mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$. El dominio para las funciones exponenciales siempre serán todos los números reales.

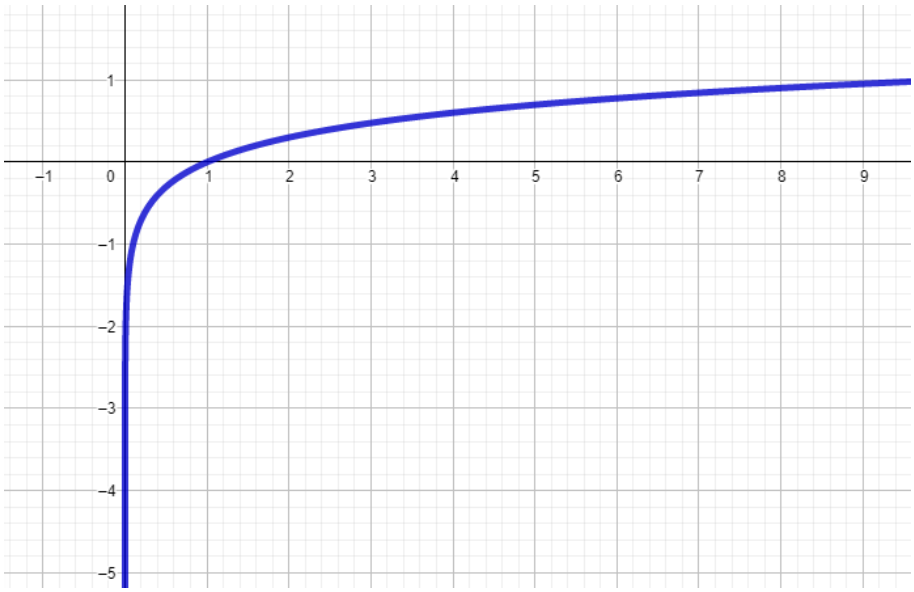
El **rango** o **imagen** son todos los números reales positivos $(0, +\infty)$.

1.4.2.2. Funciones logarítmicas

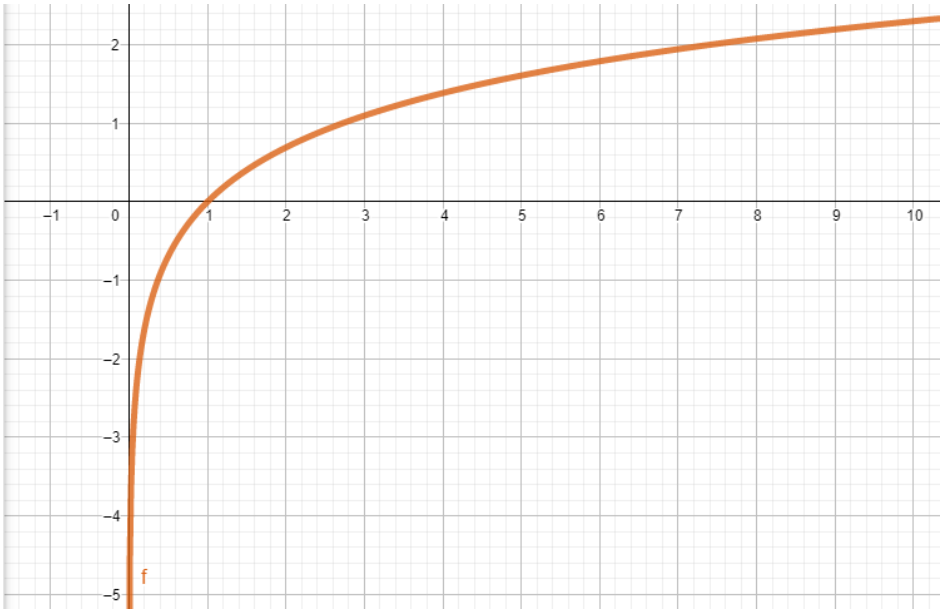
La función logarítmica se define como $y = \log_a(x)$ donde **a** es la base de la función y una constante positiva.

Las funciones logarítmicas más utilizadas son:

a) $y = \log_{10}(x)$, función logarítmica de base **10**:



b) $y = \ln x$, función logarítmica de base natural **e**:



La **gráfica** de toda función logarítmica pasa por el **punto (1,0)**.

El **dominio** son todos los números reales positivos $(0, +\infty)$.

El **rango** o **imagen** son todos los números reales $\mathbb{R}$ o $(-\infty, +\infty)$.

En una función logarítmica diferente de $\mathbf{log_{10}}(\boldsymbol{x})$ o $\mathbf{ln}\,\boldsymbol{x}$, el dominio se determinará por el siguiente método:

1. Se toma en consideración sólo el argumento de la función logarítmica.
2. La función se iguala a cero.
3. Posteriormente se obtienen las soluciones de la ecuación.
4. El dominio de la función logarítmica será igual o mayor que los valores obtenidos.

Ejemplo:

a) Determina el dominio y rango de la siguiente función:

$$f(x) = \log(5x+3)$$

Tomamos el argumento de la función, lo igualamos a cero y resolvemos:

$$5x+3=0$$
$$5x=-3$$
$$x=-\frac{3}{5}$$

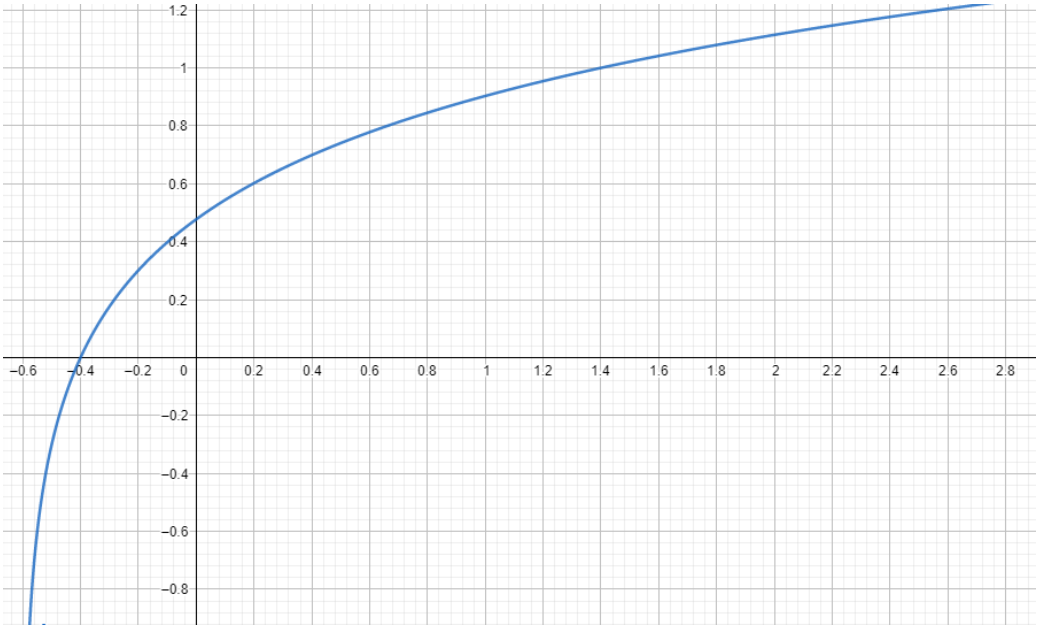
El **dominio** de la función es:

$$\left[-\frac{3}{5},\infty\right)$$

El **rango** o **imagen** de la función es:

$$(-\infty,\infty)$$

Esto podemos observarlo en la gráfica de la función. Recordemos que $-\frac{3}{5}=-0.6$.



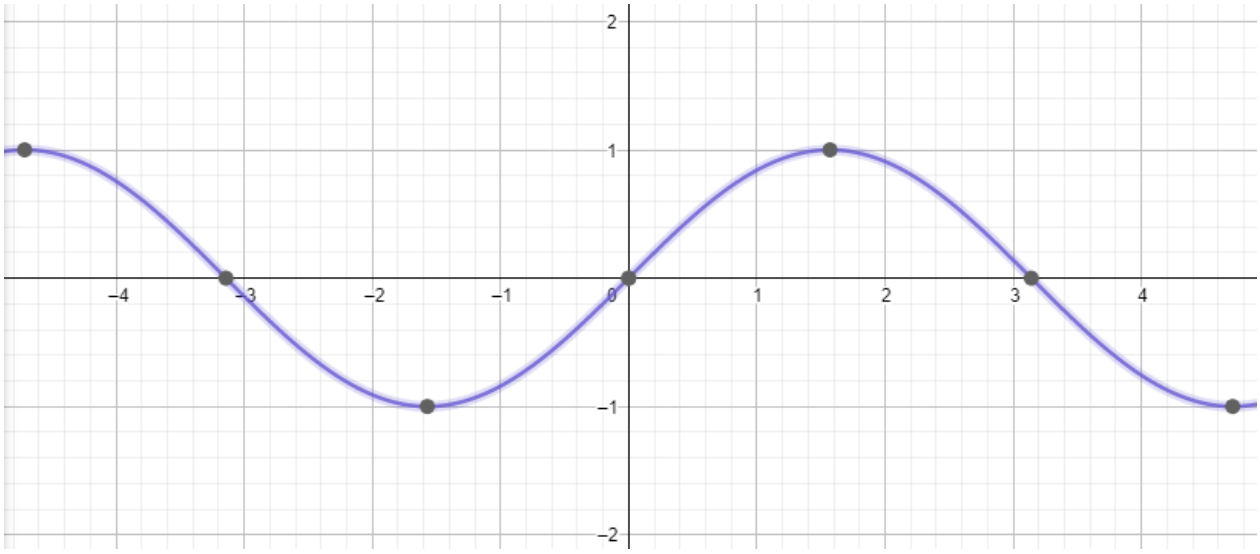
1.4.2.2. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son el conjunto de funciones que se definen con base en un triángulo rectángulo. Son las siguientes:

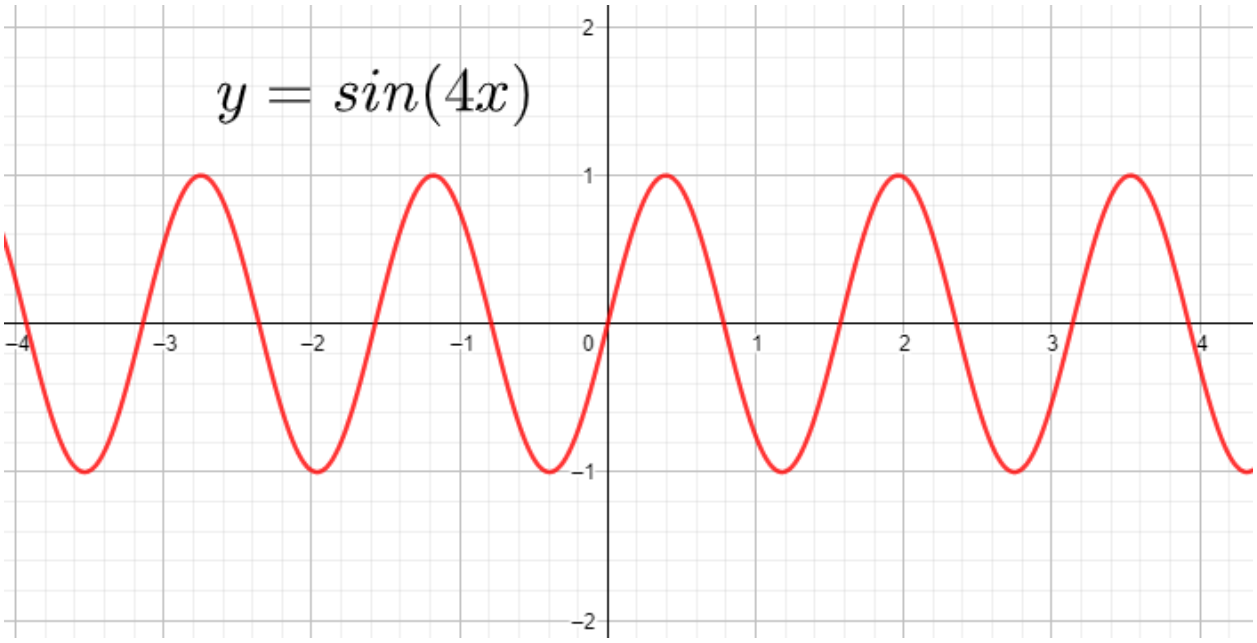
a) Función seno

Tiene la forma $\mathbf{sin}\, x$.

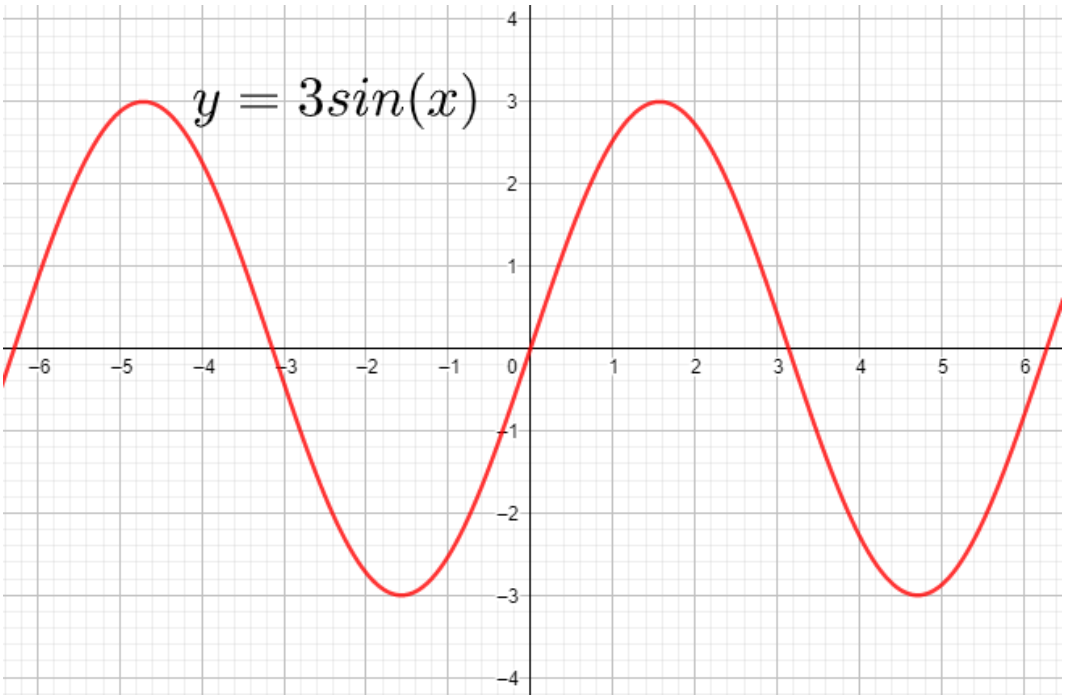
Su gráfica siempre cruza el origen. Su **dominio** es $(-\infty, +\infty)$ y su **rango** o **imagen** está dada por $[-1, 1]$.



Si existe una constante dentro de la función seno, afectará la frecuencia de la misma; si es mayor que un entero aumentará la frecuencia de la función, y si es menor la disminuirá. Sin embargo, **el dominio y el rango seguirán siendo los mismos**, como se observa en el siguiente ejemplo:



Por otra parte, **si la constante se encuentra afuera de la función**, **afectará la imagen de la misma, aumentándola si es mayor que 1 y disminuyéndola si es menor que 1**, como se observa en el siguiente ejemplo:



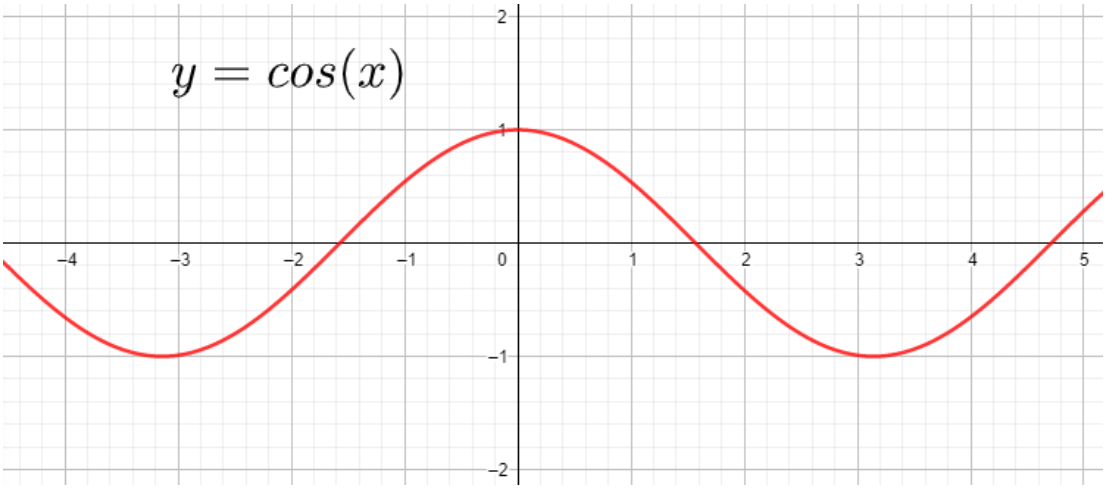
Para la función $\boldsymbol{y = 3\sin x}$, su **dominio** sigue siendo el mismo que para los ejemplos anteriores: todos los números reales $(-\infty, +\infty)$; pero su **rango** o **imagen** ya no será el mismo, sino que está dado por $\boldsymbol{[-3, 3]}$**.**

Este principio también es válido para la función **cos(x).**

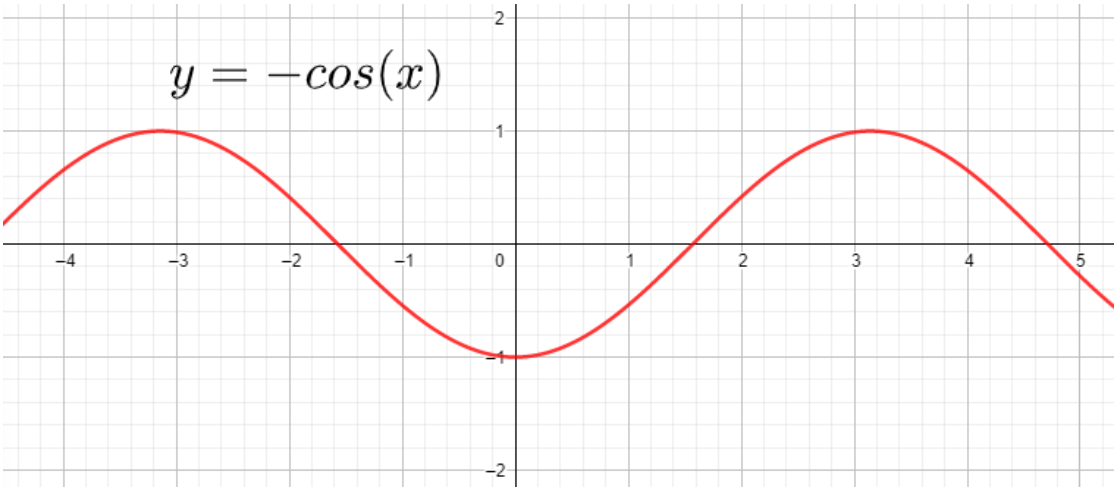
b) Función coseno

Tiene la forma $\cos x$.

La gráfica de la función coseno **siempre toca el punto (0,1) si es positiva**.

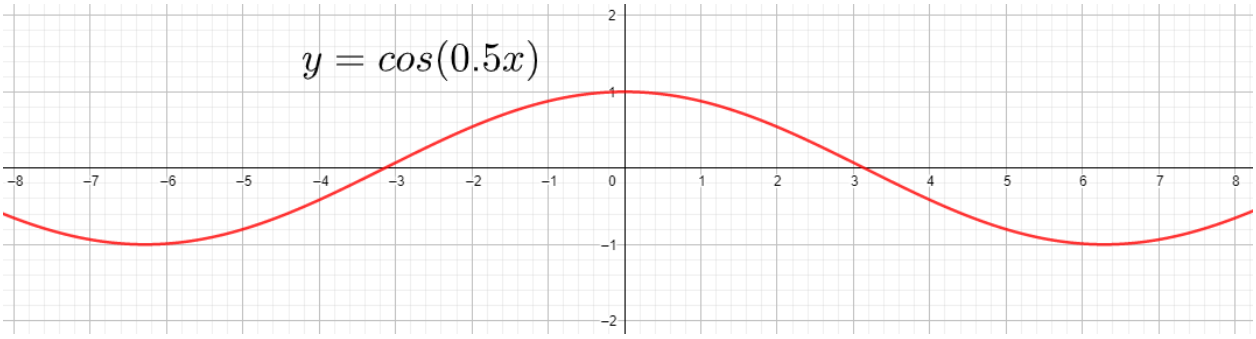


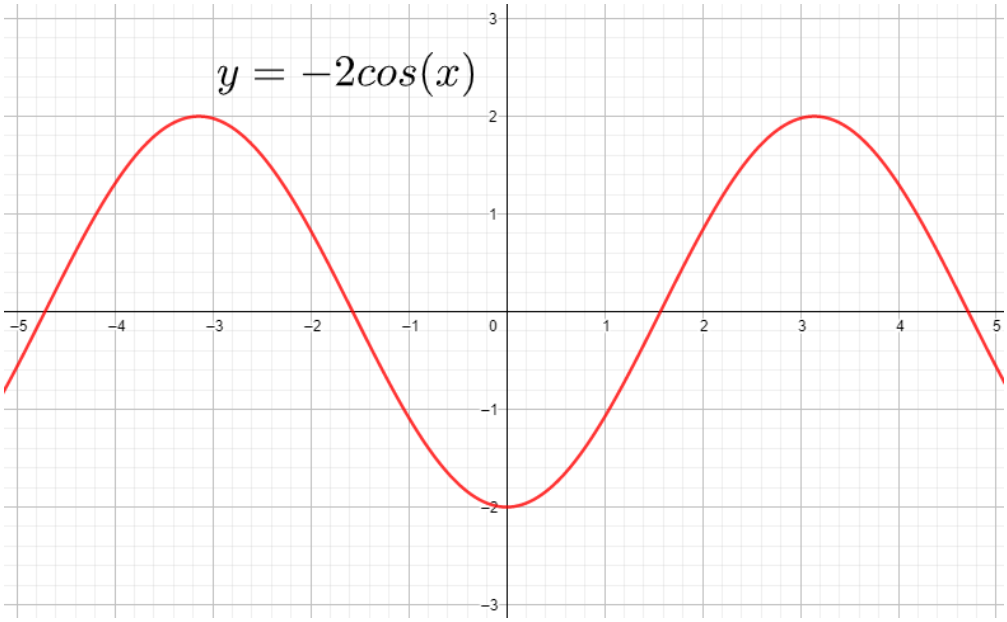
Pero **si la función es negativa, su gráfica estará en espejo con respecto al eje X y tocará el punto (0,-1)**.



Su **dominio** es $(-\infty, +\infty)$ y su **rango** o **imagen** está dado por $[-1, 1]$.

Igual que en la función seno, su frecuencia y su amplitud se modifican si existen constantes dentro o fuera de la función, respectivamente.

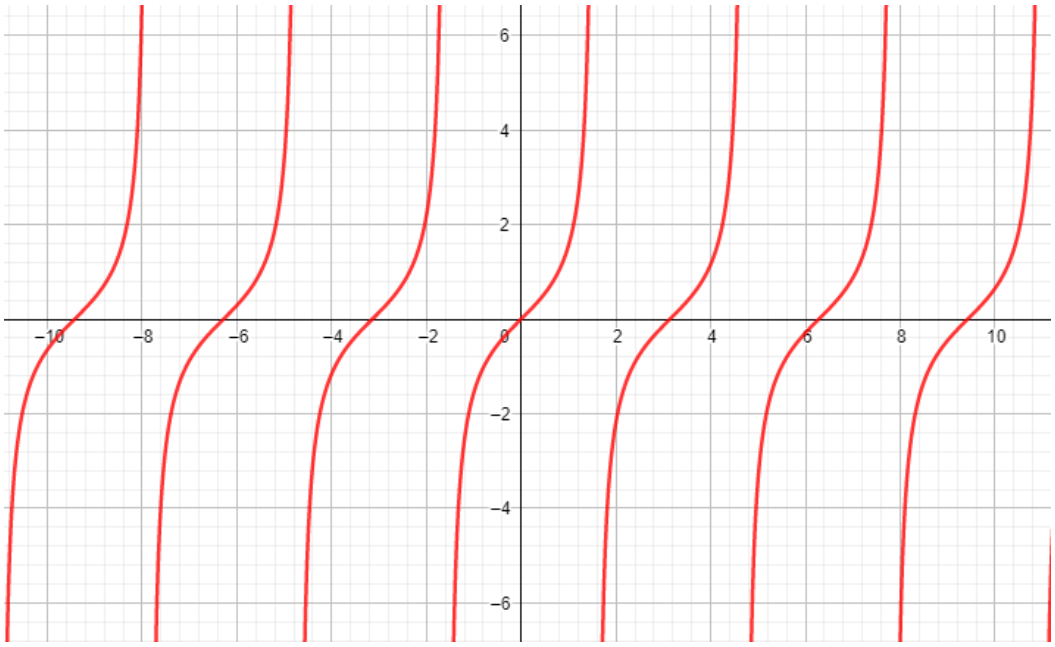




c) Función tangente

Tiene la forma $\tan x$.

Su gráfica cruza el origen y su forma se asemeja a una “S” alargada.



Su **dominio** está dado por:

$$\left\{x \in R \middle| x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Esta expresión indica que el **dominio** son todos los números reales, excepto aquellos para los que **la función tangente no está definida**.

RETO: Utiliza tu calculadora científica para encontrar los valores de:

- $\tan(1) =$
- $\tan(-2) =$
- $\tan(\pi) =$
- $\tan(-2\pi) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) =$
- $\tan\left(\frac{5\pi}{2}\right) =$

El **rango** o **imagen** de la función tangente son todos los números reales $(-\infty, +\infty)$.

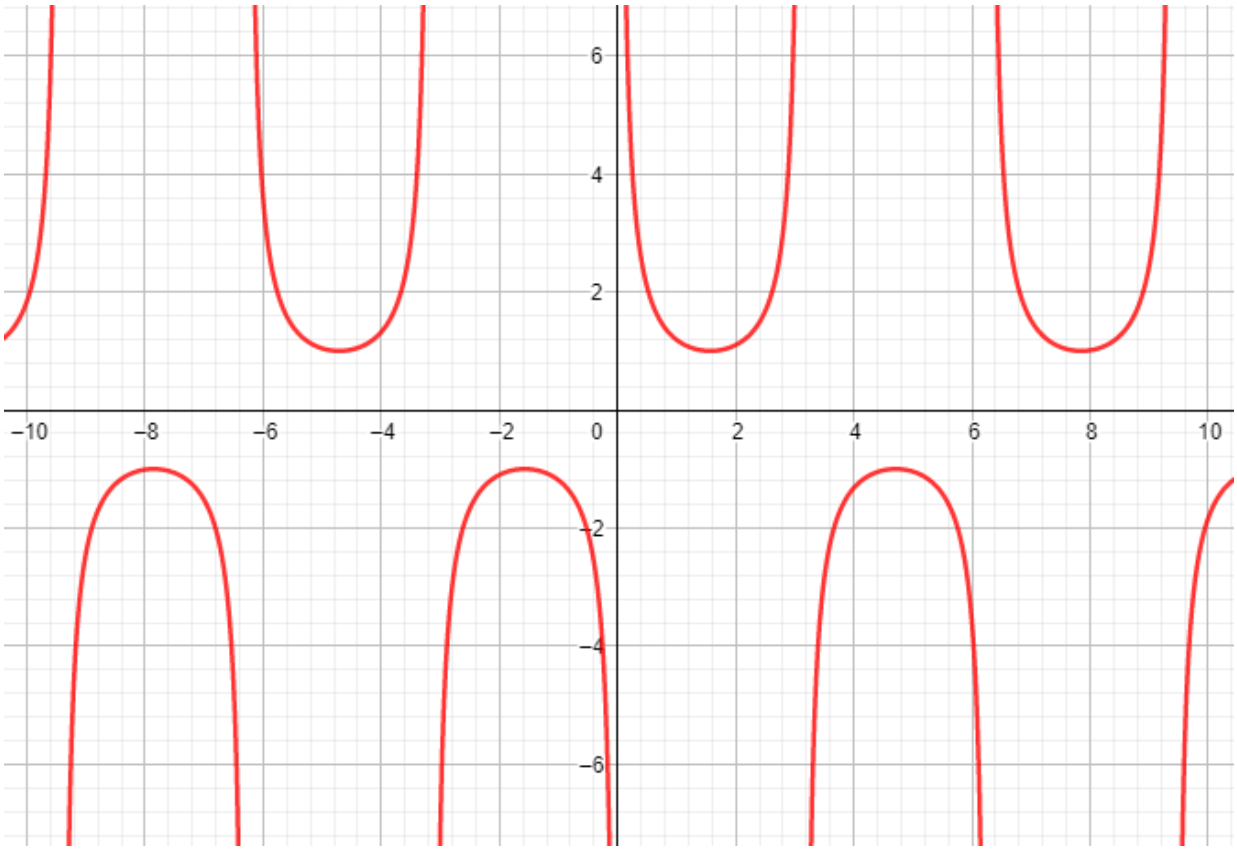
Al igual que las funciones seno y coseno, **su frecuencia se afecta por una constante dentro de la función**, y **su amplitud (el alargamiento de la “S”) varía si la constante se encuentra fuera de la función**.

Este principio es válido para el resto de las funciones trigonométricas.

d) Función cosecante

Tiene la forma $\csc x$.

Su gráfica es semejante a una parábola, es decir, tienen forma de U. La gráfica no cruza el origen.



Su **dominio** está dado por:

$$\{x \in R \mid x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$$

Esta expresión indica que el **dominio** son todos los números reales, excepto aquellos para los que **la función cosecante no está definida**.

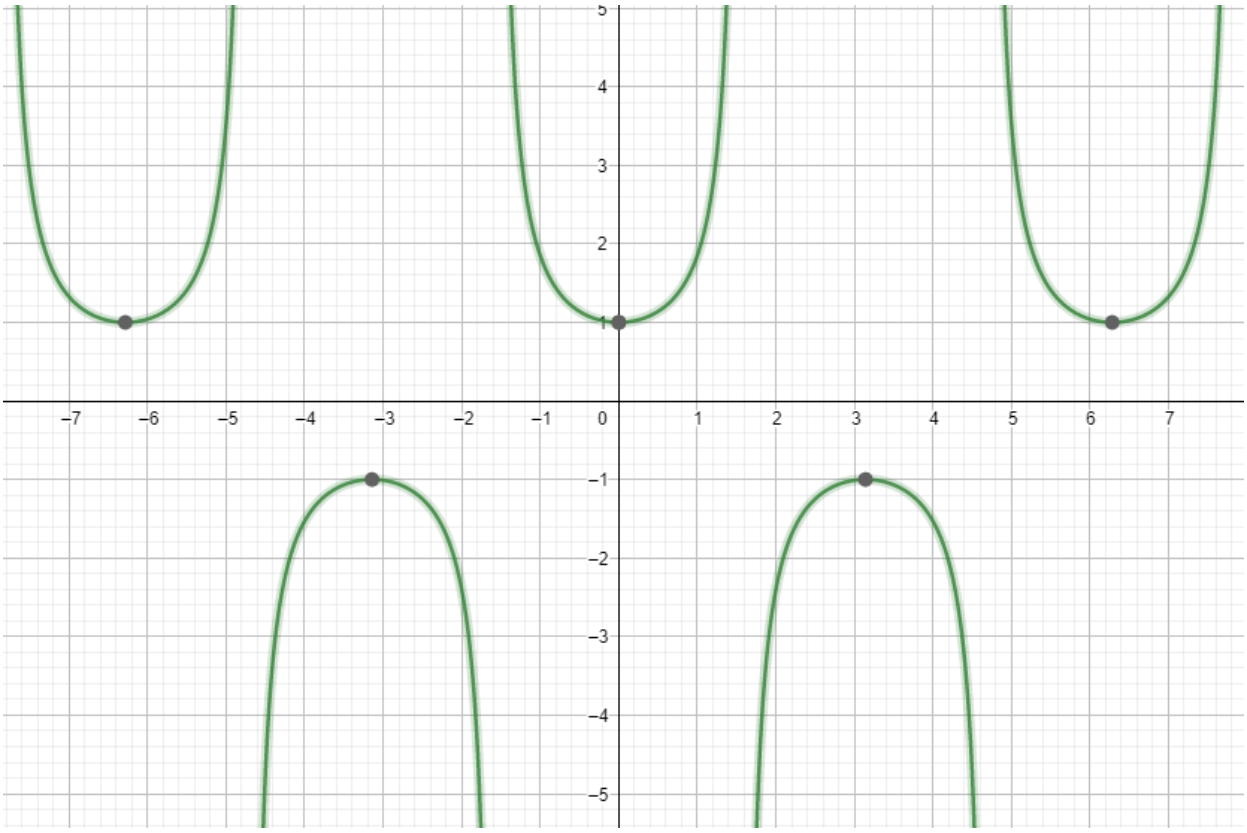
Su **rango** o **imagen** es: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

El **rango** es afectado por una constante fuera de la función y la frecuencia se altera si esta se encuentra dentro de la función.

e) Función secante

Tiene la forma $\sec x$.

Su gráfica es semejante a la de la función cosecante, pero esta toca el punto (0,1).



Su **dominio** está dado por:

$$\left\{x \in R \middle| x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$$

Esta expresión indica que el **dominio** son todos los números reales, excepto aquellos para los que **la función secante no está definida**.

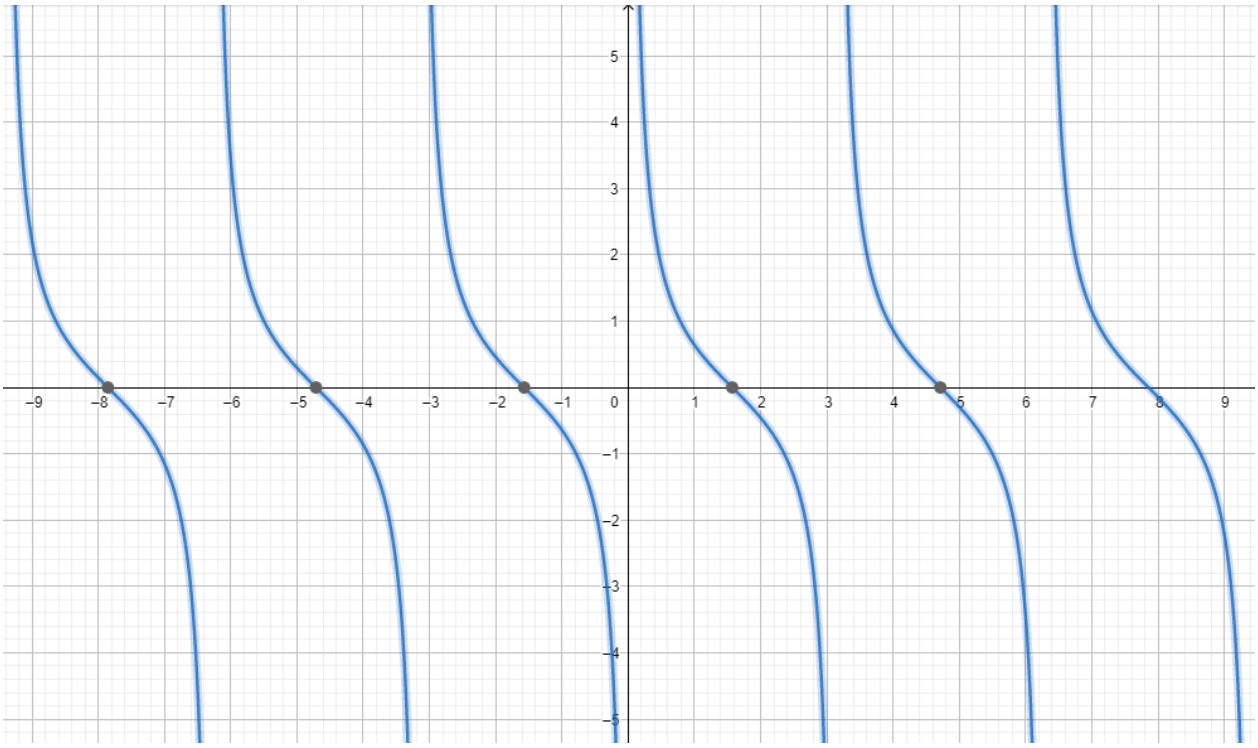
Su **rango** o **imagen** es: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

El **rango** es afectado por una constante fuera de la función y la frecuencia se altera si esta se encuentra dentro de la función.

f) Función cotangente

Tiene la forma $\cot x$.

La gráfica de la función cotangente es similar a la gráfica de la función tangente, pero está desplazada con respecto a la función tangente y no toca el origen, sino que se encuentra en espejo respecto de la tangente.



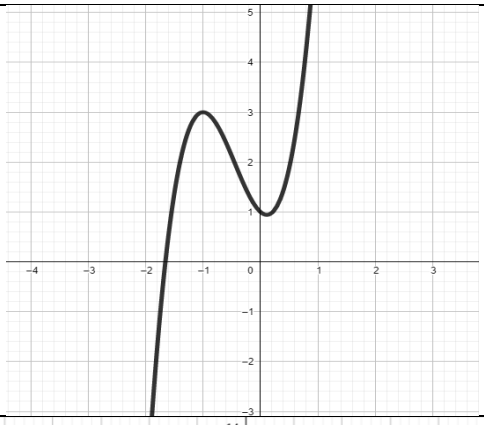
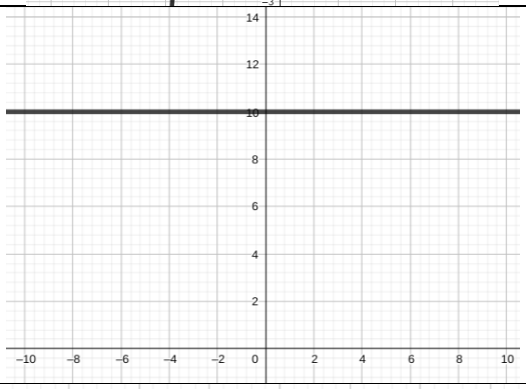
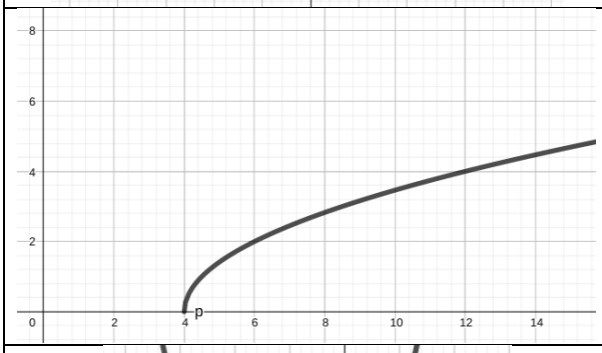
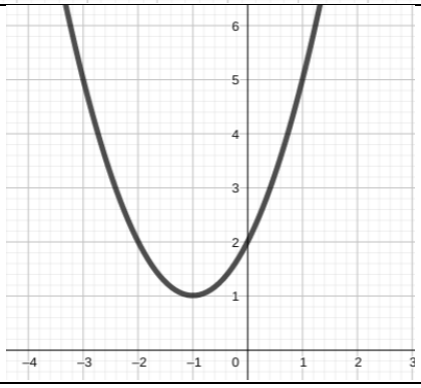
Si afectamos el interior o el exterior de la función, obtendremos el mismo resultado que en la función tangente, modificaremos la frecuencia o amplitud de la misma.

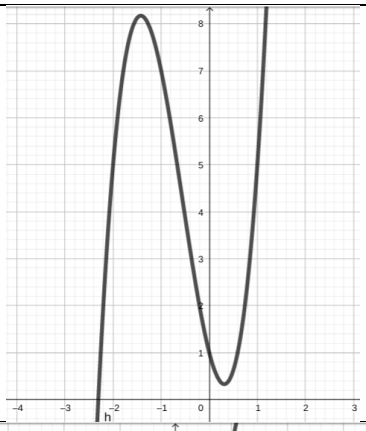
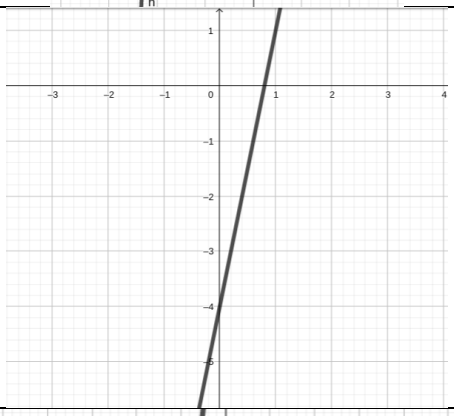
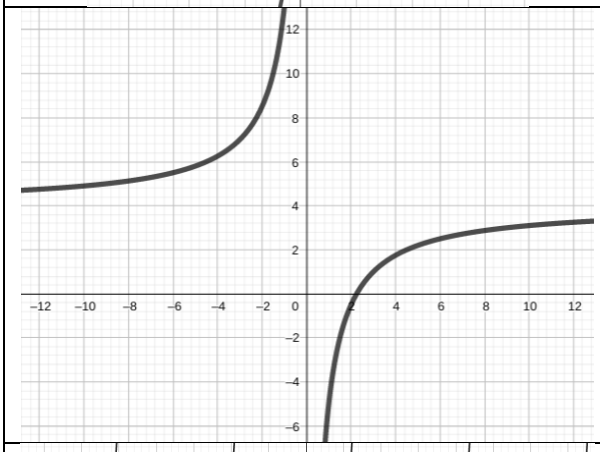
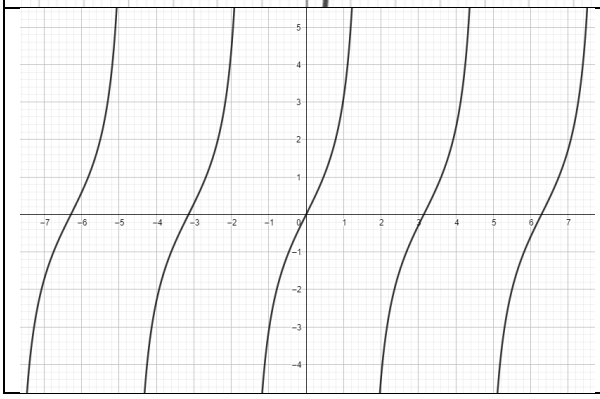
Su **dominio** está dado por:

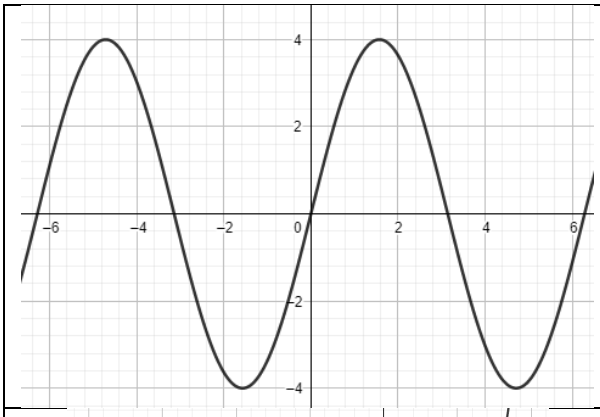
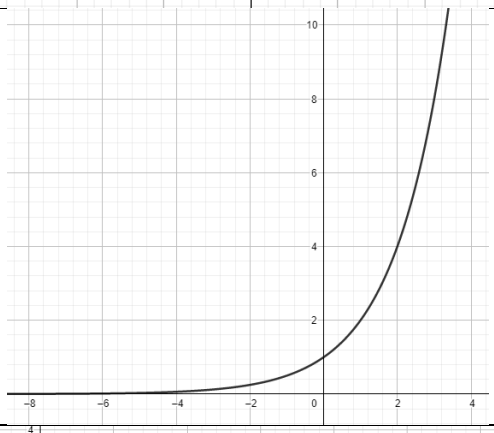
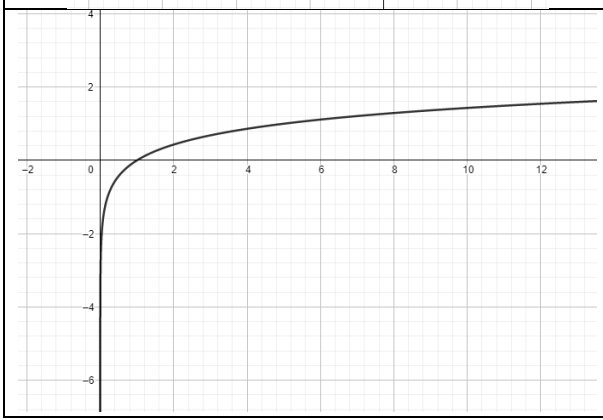
$$\{x \in R \mid x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$$

El **rango** o **imagen** de la función cotangente son todos los números reales $(-\infty, +\infty)$.

I. Escribe junto a las gráficas que se muestran a continuación los datos correspondientes a cada función. Guíate del ejemplo resuelto de la primera gráfica.

	**Tipo de función:** Cúbica **Modelo matemático:** $ax^3 + bx^2 + cx + d$ **Función:** $x^3 + 4x^2 - x + 1$ **Dominio:** $(-\infty, +\infty)$ **Rango:** $(-\infty, +\infty)$
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____

	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____

	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____
	**Tipo de función:** _____ **Modelo matemático:** _____ **Función:** _____ **Dominio:** _____ **Rango:** _____

II. Los datos para el llenado de cada sección puedes tomarlos de los siguientes cuadros. Puedes repetir algunos datos, según consideres necesario.

Tipo de función					
Constante	Lineal	Cuadrática	Cúbica	Racional	Irracional
Exponencial	Logarítmica	Seno	Tangente		
Modelo matemático					
$f(x) = c$	$f(x) = mx + b$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$		
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$f(x) = a^x$	$f(x) = \log_a(x)$		
$f(x) = \sin x$	$f(x) = \tan x$				
Función					
$f(x) = 10$	$f(x) = 5x - 4$	$f(x) = x^2 + 2x + 2$	$f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 4x + 1$		
$f(x) = \frac{4x-9}{x}$	$f(x) = \sqrt[2]{2x - 8}$	$f(x) = 2^x$	$f(x) = \log_5(x)$		
$f(x) = 4\sin x$	$f(x) = 2\tan x$				
Dominio					
$(-\infty,\infty)$	$[4, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$\left\{x \in R, x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$	$(0, \infty)$	
Rango					
$\{10\}$	$[0, \infty)$	$[1, \infty)$	$(-\infty,\infty)$		
$(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$	$[-4, 4]$	$(0, \infty)$			

2. Sucesiones numéricas y regiones de crecimiento y decrecimiento

2.1. Conceptos básicos

Una **sucesión numérica es un conjunto ordenado de números**. Cada uno de ellos es denominado **término** (también elemento o miembro) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la longitud de la sucesión.

En este libro de trabajo estudiaremos únicamente aquellas sucesiones cuyos elementos pertenecen al conjunto de los números reales.

Existen dos tipos de sucesiones: las **aritméticas** y las **geométricas**.

2.2. Sucesiones aritméticas

Una **sucesión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene del anterior sumando o restando una **cantidad constante**. Por ejemplo:

$$9 \;;\; 11 \;;\; 13 \;;\; 15 \;;\; \boxed{17}$$

$$+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$$

Los términos que forman parte de esta sucesión obedecen a una **fórmula matemática que describe su comportamiento**, la cual corresponde a una **función lineal** cuya forma es:

$$f(x) = mx + b$$

donde:

- **f(x)** corresponde a los valores de los términos;
- **x** es la cantidad de lugares que tenemos que avanzar a partir del primer término para llegar al lugar que ocupa el término que estamos buscando;
- **m** es la cantidad constante que se **suma o resta** en la sucesión, la cual corresponde al valor de la **pendiente de la recta**.
- **b** es el valor del primer término.

Para conocer cuál es la **función lineal** que describe el comportamiento de la sucesión bastará con sustituir los valores de **m** y **b**.

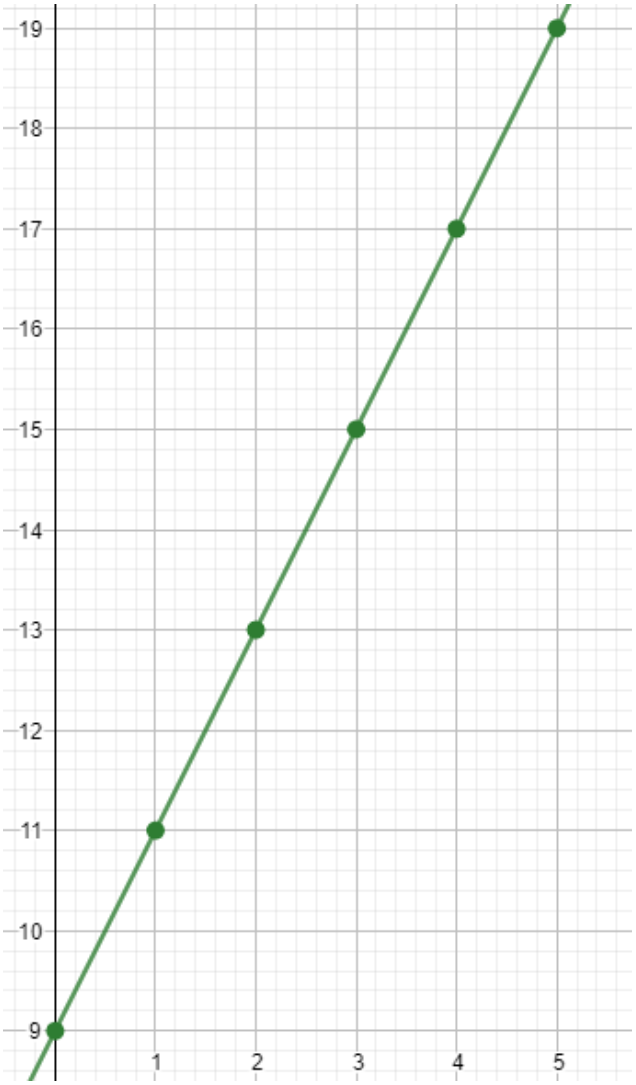
La **función lineal** que corresponde a la **sucesión** del ejemplo anterior es:

$$f(x) = 2x + 9$$

Esto es debido a que:

- El valor de **m es 2**, ya que se van **sumando 2 unidades** conforme avanza la sucesión.
- El valor de **b es 9**, ya que este es el **primer término** de la sucesión.

Si graficamos esta **función lineal** podremos observar con mayor facilidad cuáles son los términos que forman parte de esta sucesión.



Es importante mencionar que, en la gráfica, el valor de la **x NO CORRESPONDE al lugar que ocupa el término**, sino a la diferencia de lugares que hay entre este y el primero. Por ejemplo, en la sucesión, el **quinto término** es el **17**, el cual corresponde al valor de **f(x)** cuando **x=4**, esto es así porque **hay cuatro lugares entre el primer y el quinto término**.

Continuando con el ejemplo, podemos darnos cuenta que el **sexto término** es el **19**, ya que este es el valor que corresponde a **f(x)** cuando **x=5** (recuerda que hay cinco lugares entre el primer y el sexto término).

Como el valor de cada término va **aumentando** conforme la sucesión avanza, decimos que se trata de una función lineal **creciente** en todo su **dominio** $(-\infty, +\infty)$.

Veamos un ejemplo más. Tenemos la siguiente **sucesión aritmética**:

$$100, 90, 80, 70, \ldots$$

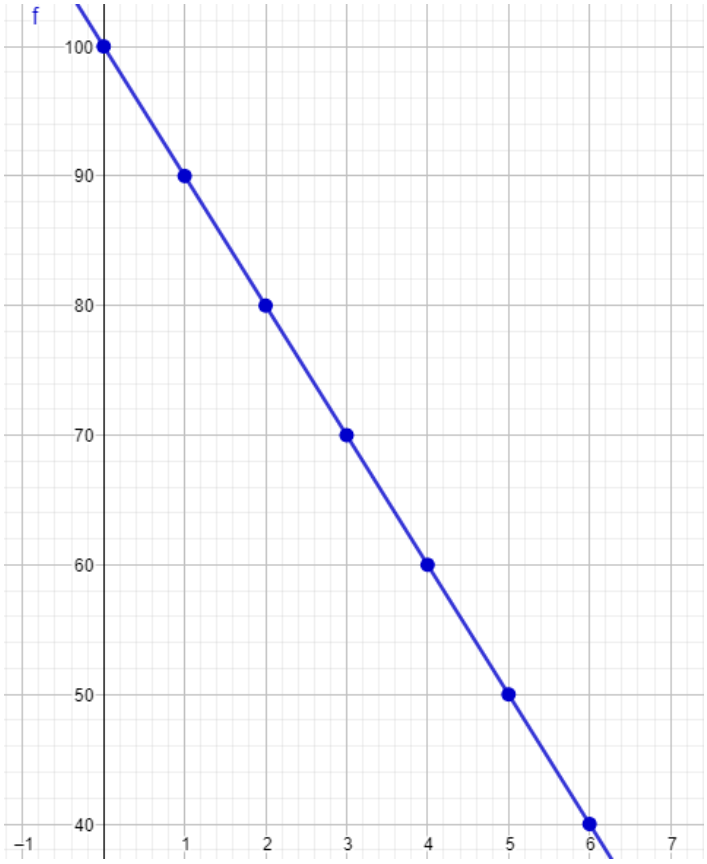
¿Cuál es la **función lineal** que describe su comportamiento?

- El valor de **m es** $-\mathbf{10}$, ya que se van **restando 10 unidades** conforme avanza la sucesión.
- El valor de **b es 100**, ya que este es el primer término de la sucesión.

Entonces, la **función lineal** es:

$$f(x) = -10x + 100$$

Si graficamos esta **función lineal** podremos observar con mayor facilidad cuáles son los términos que forman parte de esta sucesión.



Si observas la gráfica con atención podrás darte cuenta que el término que sigue en la sucesión (el **quinto término**) es el **60**, el cual corresponde al valor de **f(x)** cuando **x=4** (**hay cuatro lugares entre el primer y el quinto término**).

El **sexto término** de la sucesión es el **50**, el **séptimo término** es el **40**. ¿Cuál crees que sería el **décimo término**? ¿Y el **duodécimo**? ¿Cómo encontrarías el **trigésimo**?

Como el valor de cada término va **disminuyendo** conforme la sucesión avanza, decimos que se trata de una función lineal **decreciente** en todo su **dominio** $(-\infty, +\infty)$.

2.2. Sucesiones geométricas

Una **sucesión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene del anterior multiplicando una **cantidad constante**. Por ejemplo:

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} \boxed{16}$$

Los términos que forman parte de esta sucesión obedecen a una **fórmula matemática que describe su comportamiento**, la cual corresponde a una **función exponencial** cuya forma es

$$f(x) = a_1 \cdot r^x$$

donde:

- **f(x)** corresponde a los valores de los términos;
- **x** es la cantidad de lugares que tenemos que avanzar a partir del primer término para llegar al lugar que ocupa el término que estamos buscando;
- **r** es la cantidad constante que se **multiplica** en la sucesión, llamada **razón común**.
- $\mathbf{a_1}$ es el valor del primer término.

Para conocer cuál es la **función exponencial** que describe el comportamiento de una sucesión bastará con sustituir los valores de $\mathbf{a_1}$ y **r**.

La **función exponencial** que corresponde a la **sucesión** presentada es:

$$f(x) = 1 \cdot 2^x$$

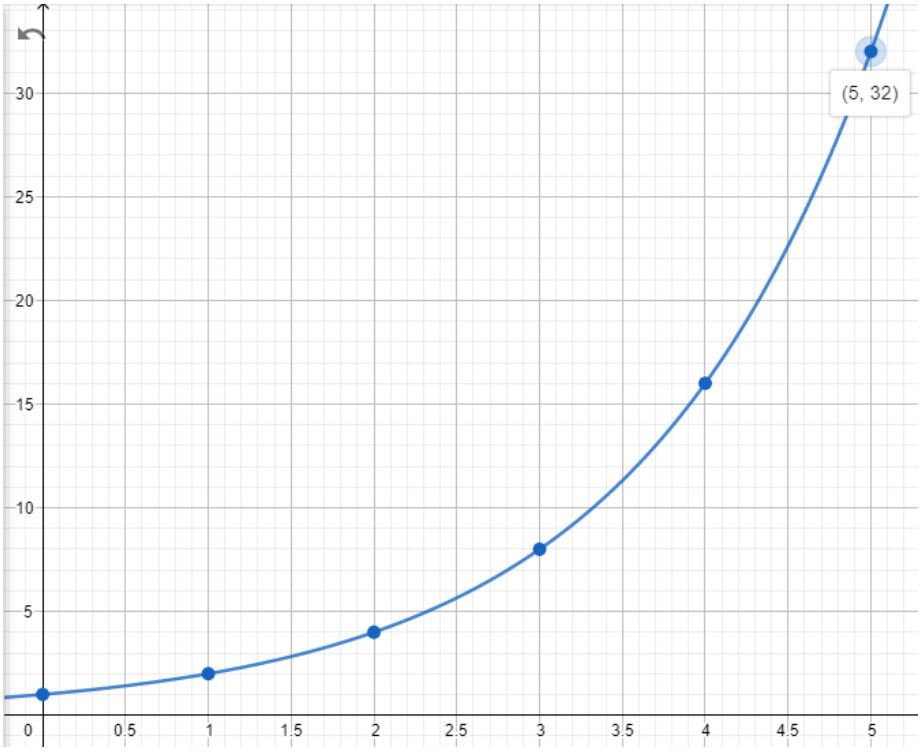
Esto es debido a que:

- El valor de **r es 2**, ya que los términos se van **multiplicando por 2** conforme avanza la sucesión.
- El valor de $\mathbf{a_1}$ **es 1**, ya que este es el **primer término** de la sucesión.

Si graficamos esta **función exponencial** podremos observar con mayor facilidad cuáles son los términos que forman parte de esta sucesión. ¿Cuál crees que será el **sexto término** de la sucesión?

En la siguiente página puedes ver la gráfica que corresponde a esta **función exponencial**. Si somos observadores, podemos darnos cuenta que **los puntos marcados en la curva nos indican tanto el lugar del término como su valor**:

El **primer término** es el **1**, el **segundo término** es el **2**, el **tercer término** es el **4**, el **cuarto término** es el **8**, el **quinto término** es el **16**, y el **sexto término** es el…



Es importante mencionar que, en la gráfica, el valor de la **x NO CORRESPONDE al lugar que ocupa el término**, sino a la diferencia de lugares que hay entre este y el primero. Observa que, en la sucesión, el **sexto término** es el **32**, el cual corresponde al valor de **f(x)** cuando **x=5**, esto es así porque **hay cinco lugares entre el primer y el sexto término**.

Como el valor de cada término va **aumentando** conforme la sucesión avanza, decimos que se trata de una función exponencial **creciente** en todo su **dominio** $(-\infty, +\infty)$.

Con lo visto hasta el momento, **responde la siguiente pregunta**: ¿de qué manera puedes encontrar el resto de los valores que forman parte de la sucesión?

_____

_____

_____

_____

PARA REFLEXIONAR:

Las **fórmulas matemáticas** que modelan el comportamiento de algún fenómeno son de vital importancia ya que nos permiten **predecir los resultados** de los eventos antes de que sucedan y así poder **tomar decisiones pertinentes.**

¿Cuál crees que será el **séptimo término**? ¿Y el **décimo**? ¿Cómo crees que sería el valor del **vigésimo término**?

Veamos un ejemplo más. Tenemos la siguiente **sucesión geométrica**:

$$200, 100, 50, 25, \ldots$$

¿Cuál es la **función exponencial** que describe su comportamiento?

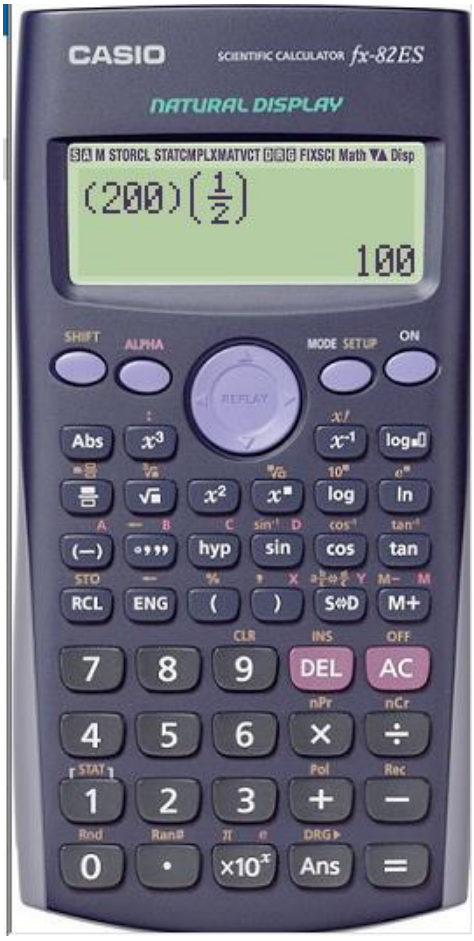
Seguramente ya te habrás dado cuenta que en esta sucesión **el valor de cada término se obtiene del anterior con una división y no con una multiplicación**. ¿Será entonces que en realidad no se trata de una sucesión geométrica?

Veamos que está sucediendo:

- El valor del **primer término** es **200**. Para obtener el valor del **segundo término** tenemos que realizar una **división entre 2**, lo que nos da como resultado **100**.

¿Habrá alguna manera de obtener el valor de 100 a partir de una multiplicación en vez de una división? La respuesta es sí.

En vez de considerar una **división entre 2**, podemos realizar una **multiplicación por ½**. ¿No me crees? ¡Haz la prueba con tu calculadora!



¿Y qué pasaría si multiplicas 100 por ½? ¿Y si al resultado obtenido lo vuelves a multiplicar por ½? _____

_____

¡Es correcto! Vas obteniendo **los términos de la sucesión**.

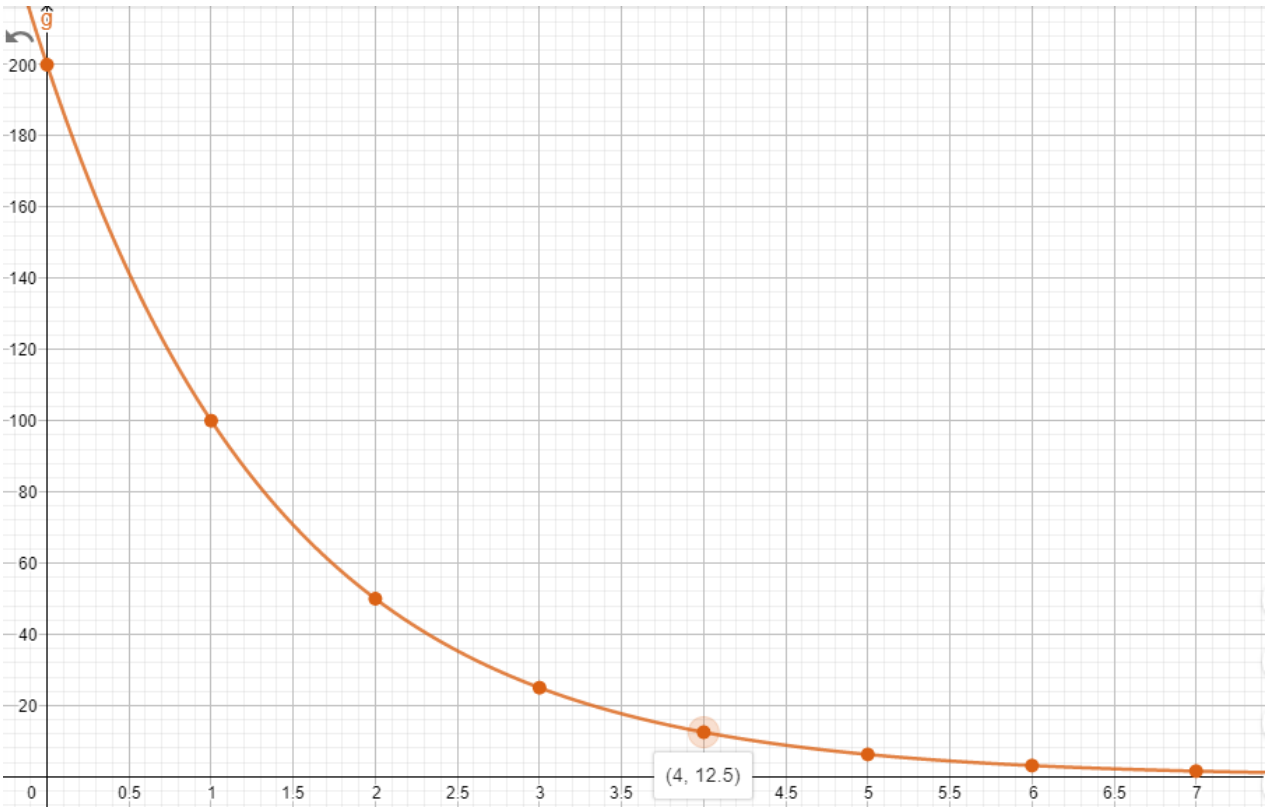
Ahora sí, vamos a escribir la **función exponencial** que corresponde a esta sucesión:

- El valor de **r es ½**, ya que los términos se van **multiplicando por ½** conforme avanza la sucesión.
- El valor de **a_1 es 200**, ya que este es el **primer término** de la sucesión.

Entonces, la **función exponencial** es:

$$f(x) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Si graficamos esta **función exponencial** podremos observar con mayor facilidad cuáles son los términos que forman parte de esta sucesión.



Si observas la gráfica con atención podrás darte cuenta que el término que sigue en la sucesión (el **quinto término**) es el **12.5** (que es la mitad de 25), el cual corresponde al valor de **f(x)** cuando **x=4** (**hay cuatro lugares entre el primer y el quinto término**).

¿Cuál es el **sexto término** de la sucesión? _____

¿Cuáles son el **séptimo** y **octavo término**? _____

¿Cuál será el **duodécimo término**? _____

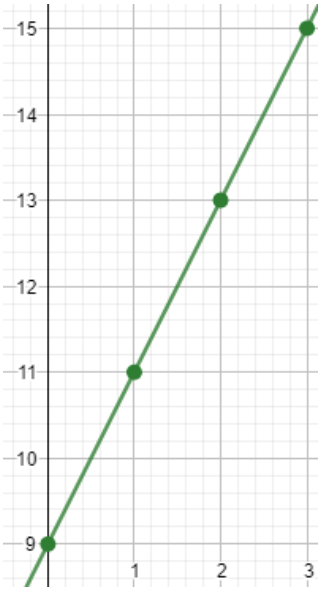
Como el valor de cada término va **disminuyendo** conforme la sucesión avanza, decimos que se trata de una función exponencial **decreciente** en todo su **dominio** $(-\infty, +\infty)$.

2.3. Función creciente y decreciente

2.3.1. Función creciente

Una función es creciente en un intervalo cuyos extremos son los números x_1 y x_2, siempre que $x_1 < x_2$ y también se cumpla que $f(x_1) < f(x_2)$.

Lo dicho anteriormente lo pudimos observar en las funciones $f(x) = 2x + 9$ y también en $f(x) = 1 \cdot 2^x$. Analicemos sus gráficas nuevamente:



La **gráfica de la izquierda** corresponde a $\boldsymbol{f(x) = 2x + 9}$.

Consideremos el intervalo **[2, 3]** para los **valores de x**. Podemos observar que el extremo de la izquierda es **menor que** el de la derecha, es decir, $\mathbf{2 < 3}$, por lo tanto, se cumple $\boldsymbol{x_1 < x_2}$**.**

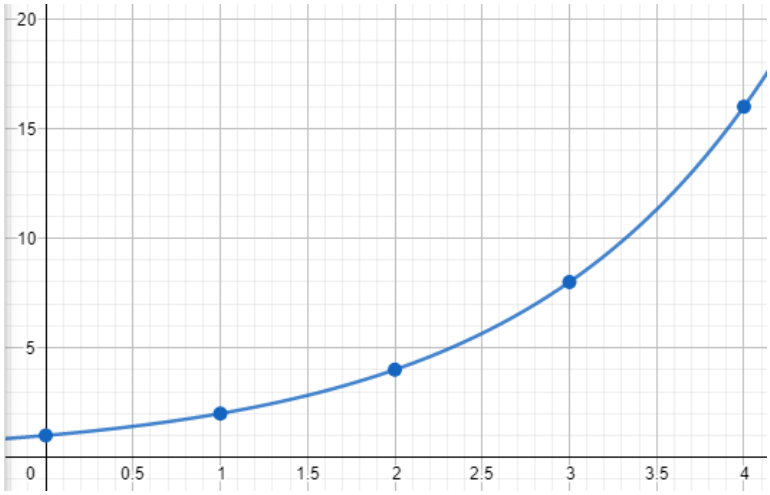
Ahora bien, para saber si la función es **creciente** en ese intervalo debe cumplirse también $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$. Veamos si es así:

Cuando $\boldsymbol{x = 2}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **13**, es decir, $\boldsymbol{f(x_1) = 13}$.

Cuando $\boldsymbol{x = 3}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **15**, es decir, $\boldsymbol{f(x_2) = 15}$.

Como sabes $\mathbf{13 < 15}$, por lo tanto, se cumple $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$.

Decimos entonces que esta función es **creciente** en ese intervalo. Sin embargo, al tratarse de una **función lineal**, este comportamiento **creciente** se mantiene a lo largo de todo su **dominio** (todos los números reales).



La **gráfica de la derecha** corresponde a $\boldsymbol{f(x) = 1 \cdot 2^x}$.

Consideremos el intervalo **[3, 4]** para los **valores de x**.

Podemos observar que el extremo de la izquierda es **menor que** el de la derecha, es decir, $\mathbf{3 < 4}$, por lo tanto, se cumple $\boldsymbol{x_1 < x_2}$**.**

Ahora bien, para saber si la función es **creciente** en ese intervalo debe cumplirse también $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$. Veamos si es así:

Cuando $\boldsymbol{x = 3}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **8**, es decir, $\boldsymbol{f(x_1) = 8}$.

Cuando $\boldsymbol{x = 4}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **16**, es decir, $\boldsymbol{f(x_2) = 16}$.

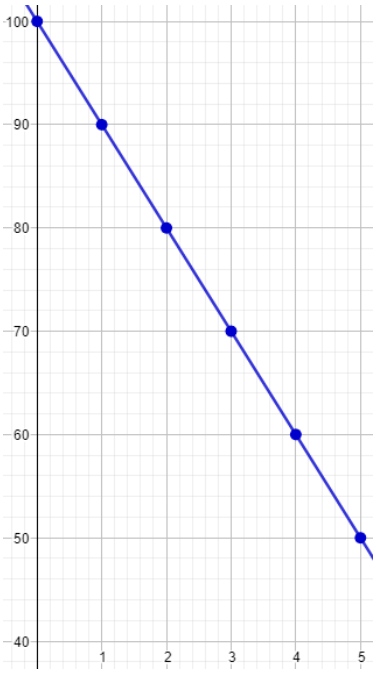
Como sabes $\mathbf{8 < 16}$, por lo tanto, se cumple $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$.

Decimos entonces que esta función es **creciente** en ese intervalo. Sin embargo, al tratarse de una **función exponencial**, este comportamiento **creciente** se mantiene a lo largo de todo su **dominio** (todos los números reales).

2.3.2. Función decreciente

Una función es decreciente en un intervalo cuyos extremos son los números **x_1** y **x_2**, siempre que $\boldsymbol{x_1 < x_2}$ y se cumpla que $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$.

Esto lo pudimos observar en las funciones $\boldsymbol{f(x) = -10x + 100}$ y $\boldsymbol{f(x) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x}$.



La **gráfica de la izquierda** corresponde a: $\boldsymbol{f(x) = -10x + 100}$. Consideremos el intervalo **[4, 5]** para los **valores de x**. Podemos observar que el extremo de la izquierda es **menor que** el de la derecha, es decir, $\boldsymbol{4 < 5}$, por lo tanto, se cumple $\boldsymbol{x_1 < x_2}$**.**

Ahora bien, para saber si la función es **decreciente** en ese intervalo debe cumplirse también $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$. Veamos si es así:

Cuando $\boldsymbol{x = 4}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **60**, es decir, $\boldsymbol{f(x_1) = 60}$.

Cuando $\boldsymbol{x = 5}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **50**, es decir, $\boldsymbol{f(x_2) = 50}$.

Como sabes $\boldsymbol{60 > 50}$, por lo tanto, vemos que sí se cumple $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$.

Decimos entonces que esta función es **decreciente** en ese intervalo. Sin embargo, al tratarse de una **función lineal**, este comportamiento **decreciente** se mantiene a lo largo de todo su **dominio** (todos los números reales).

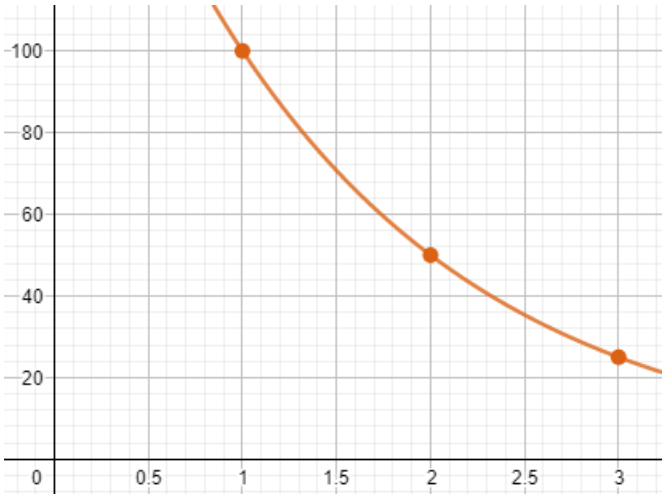
La **gráfica de la derecha** corresponde a

$$\boldsymbol{f(x) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x}.$$

Consideremos el intervalo **[1, 2]** para los **valores de x**.

Podemos observar que el extremo de la izquierda es **menor que** el de la derecha, es decir, $\boldsymbol{1 < 2}$, por lo tanto, se cumple $\boldsymbol{x_1 < x_2}$**.**

Para saber si la función es **decreciente** en ese intervalo debe cumplirse también $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$. Veamos si es así:



Cuando $\boldsymbol{x = 1}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **100**, es decir, $\boldsymbol{f(x_1) = 100}$.

Cuando $\boldsymbol{x = 2}$ el valor de $\boldsymbol{f(x)}$ es **50**, es decir, $\boldsymbol{f(x_2) = 50}$.

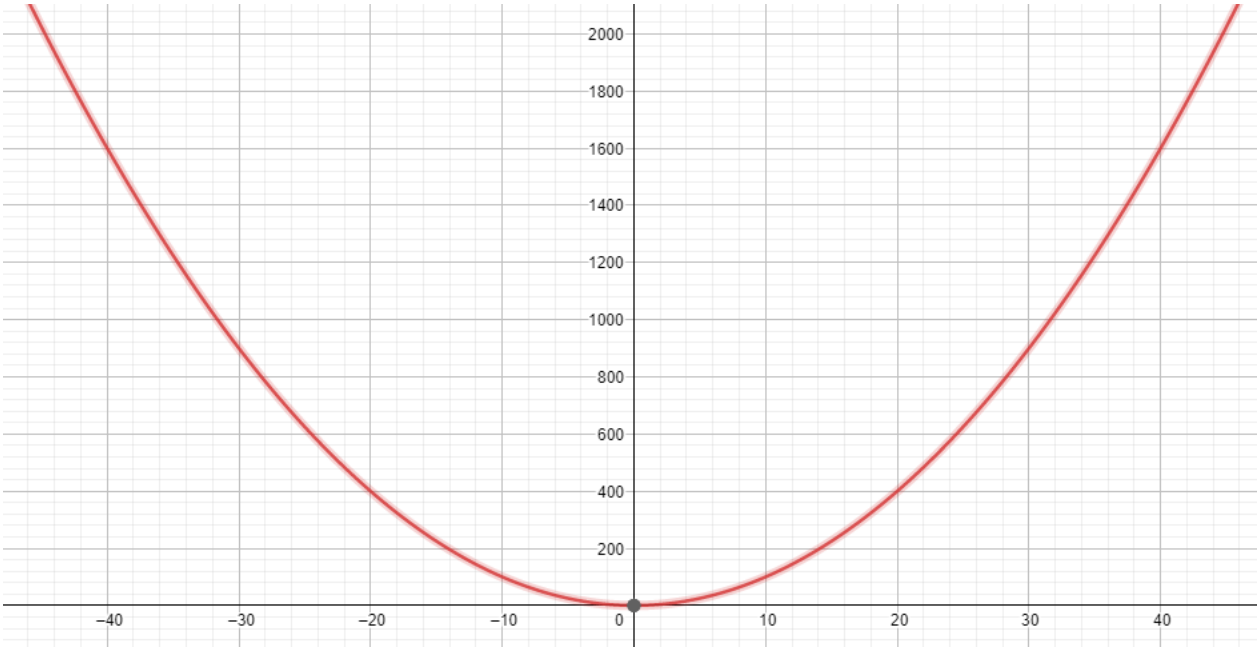
Como sabes $\boldsymbol{100 > 50}$, por lo tanto, se cumple $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$.

Decimos entonces que esta función es **decreciente** en ese intervalo. Sin embargo, al tratarse de una **función exponencial**, este comportamiento **decreciente** se mantiene a lo largo de todo su **dominio** (todos los números reales).

2.4. Regiones de crecimiento y decrecimiento

En las páginas anteriores pudimos ver ejemplos de **funciones** que tienen un comportamiento **creciente** y un comportamiento **decreciente** a lo largo de todo su **dominio**. Sin embargo, **hay otras funciones que no se comportan de la misma manera**, sino que son **crecientes** en un intervalo, pero **decrecientes** en otro; es decir, pueden comportarse tanto de forma **creciente** como **decreciente** a lo largo de todo su dominio.

Ejemplo de estas funciones son las **funciones cuadráticas** y las **funciones cúbicas**. Veamos un ejemplo de cada una de ellas:



La **gráfica de arriba** nos muestra una **parábola** que corresponde a la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$. Puedes observar como **la curva viene descendiendo** hasta llegar al **punto** ubicado en **(0,0)** (el origen del plano cartesiano), luego, a partir de ese punto, **la curva comienza a subir**.

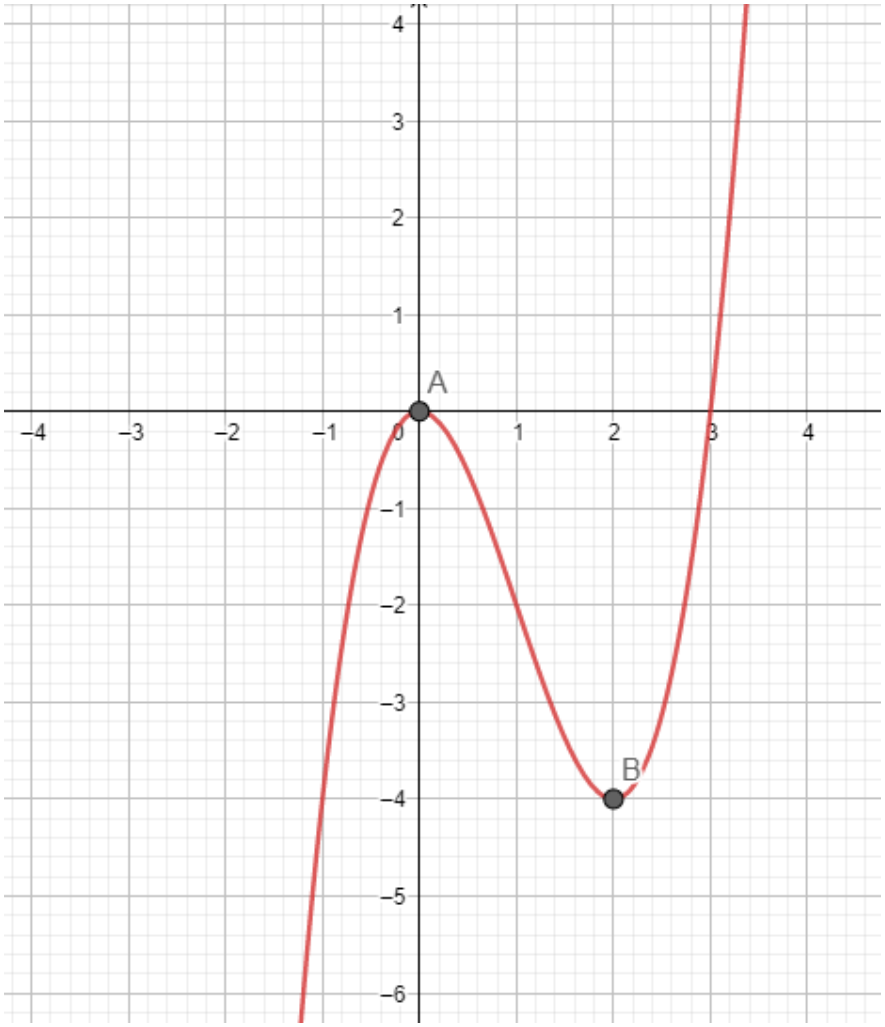
Esta sencilla observación nos servirá para **identificar las regiones de crecimiento y decrecimiento** de esta función.

Tenemos lo siguiente:

- El **dominio** de la función son todos los números reales, es decir, $(-\infty, +\infty)$.
- La función es **decreciente** en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- La función es **creciente** en el intervalo $(0, \infty)$.

- Colocamos **paréntesis** del lado del 0 porque en el punto **(0,0)** la función **no es creciente ni decreciente**, sino que ha alcanzado un **mínimo absoluto**, pero este concepto lo estudiaremos más adelante.

Ahora veamos la gráfica de una **función cúbica** e identifiquemos sus **regiones de crecimiento y decrecimiento**:



La **gráfica de arriba** corresponde a la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2}$.

Puedes observar como **la curva viene subiendo** hasta llegar al **punto** ubicado en **(0,0)** (el origen del plano cartesiano), luego, a partir de ese punto, **la curva empieza a descender** hasta llegar al punto ubicado en **(2,-4)**, para después **comenzar a subir nuevamente**.

Esta sencilla observación nos servirá para **identificar las regiones de crecimiento y decrecimiento** de esta función:

- El **dominio** de la función son todos los números reales, es decir, $(-\infty, +\infty)$.
- La función es **creciente** en el intervalo $(-\infty, 0)$.
- La función es **decreciente** en el intervalo $(0, 2)$.
- La función vuelve a ser **creciente** en el intervalo $(2, \infty)$.

- En todo momento utilizamos **paréntesis** ya que en los puntos **A(0,0)** y **B(2,-4) la** función **no es creciente ni decreciente**, sino que ha alcanzado un **máximo relativo** y un **mínimo relativo**, respectivamente. Estos conceptos los estudiaremos más adelante.

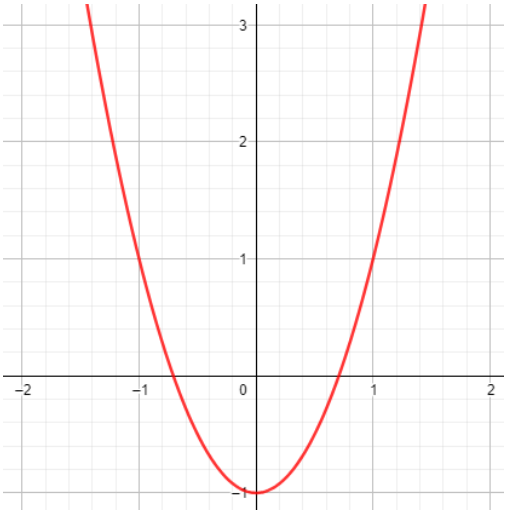
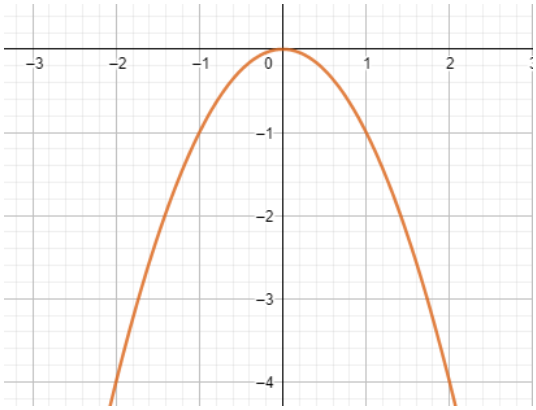
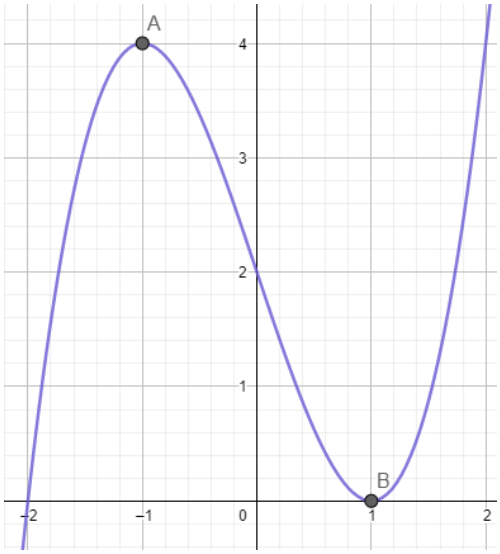
Actividades de aprendizaje

I. Guíate del ejemplo y coloca los datos correspondientes en cada una de las sucesiones numéricas que se presentan:

$500, 100, 20, \ldots$	**Tipo de sucesión:** Geométrica **Comportamiento:** Decreciente **Primer término**: 500 **Cantidad constante:** 1/5 **Tipo de función:** Exponencial **Función:** $f(x) = 500 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$ **Siguiente término:** 4
$6, 11, 16, \ldots$	**Tipo de sucesión:** _____ **Comportamiento:** _____ **Primer término**: _____ **Cantidad constante:** _____ **Tipo de función:** _____ **Función:** _____ **Siguiente término:** _____
$16, 8, 4, 0, \ldots$	**Tipo de sucesión:** _____ **Comportamiento:** _____ **Primer término**: _____ **Cantidad constante:** _____

	Tipo de función: _____ **Función:** _____ **Siguiente término:** _____
$5, 15, 45, \ldots$	**Tipo de sucesión:** _____ **Comportamiento:** _____ **Primer término**: _____ **Cantidad constante:** _____ **Tipo de función:** _____ **Función:** _____ **Siguiente término:** _____
$320, 80, 20, \ldots$	**Tipo de sucesión:** _____ **Comportamiento:** _____ **Primer término**: _____ **Cantidad constante:** _____ **Tipo de función:** _____ **Función:** _____ **Siguiente término:** _____
$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$	**Tipo de sucesión:** _____ **Comportamiento:** _____ **Primer término**: _____ **Cantidad constante:** _____ **Tipo de función:** _____ **Función:** _____ **Siguiente término:** _____

II. Guíate del ejemplo y escribe los datos correspondientes en las gráficas que se presentan:

	**Función**: $2x^2 - 1$ **Tipo de función:** Cuadrática **Dominio:** $(-\infty, +\infty)$ **Región decreciente**: $(-\infty, 0)$ **Región creciente:** $(0, +\infty)$
	**Función**: $-x^2$ **Tipo de función:** _____ **Dominio:** _____ **Región creciente**: _____ **Región decreciente:** _____
	**Función**: $x^3 - 3x + 2$ **Tipo de función:** _____ **Dominio:** _____ **Región creciente**: _____ **Región decreciente:** _____ **Región creciente**: _____

3. Operaciones con funciones

Cuando hablamos de **operaciones con funciones** nos referimos a todos aquellos movimientos algebraicos que podemos realizar entre dos o más funciones: **suma, resta, multiplicación y división**.

3.1. Suma de funciones

Se denota por:

$$\boldsymbol{f(x) + g(x) = (f + g)(x)}$$

Realizamos la **suma de funciones** obedeciendo las **reglas algebraicas** correspondientes, como la **reducción de términos semejantes**.

Ejemplo:

Realiza la **suma** de $\boldsymbol{f(x) + g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x) = 4x - 4}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2x + 1}$

$$f(x) \quad + \quad g(x) \quad =$$

$$(4x - 4) + (x^2 - 2x + 1) =$$

$$4x - 4 \; + \; x^2 - 2x + 1 \; =$$

$$x^2 + 4x - 2x - 4 + 1 \; =$$

$$\boldsymbol{x^2 + 2x - 3}$$

3.2. Resta de funciones

Se denota por:

$$\boldsymbol{f(x) - g(x) = (f - g)(x)}$$

La **función** a la que se le quita o se le sustrae será llamada **minuendo** y la **función** que **resta** o sustrae es llamada **sustraendo.** Debemos recordar que **el signo negativo afectará los signos de los términos** que pertenecen al **sustraendo**. Luego, realizaremos la resta obedeciendo las reglas algebraicas correspondientes, como la **reducción de términos semejantes**.

Ejemplo:

Realiza la **resta** de $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x) = 4x - 4}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2x + 1}$

$$f(x) \quad - \quad g(x) \quad =$$

$$(4x - 4) - (x^2 - 2x + 1) =$$

$$4x - 4 \; - \; x^2 + 2x - 1 \; =$$

$$-x^2 + 4x + 2x - 4 - 1 \; =$$

$$\boldsymbol{-x^2 + 6x - 5}$$

3.3. Multiplicación de funciones

Se denota por:

$$\boldsymbol{f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)}$$

Realizamos la **multiplicación de funciones** de la misma manera en que realizamos la multiplicación de: **monomio por monomio**, **monomio por polinomio** o **polinomio por polinomio**, según sea el caso, tal como aprendimos en el curso de Álgebra. Recuerda que debemos obedecer la **ley de los signos**, la **ley de los exponentes** y realizar la **reducción de términos semejantes**.

Ejemplo:

Realiza la **multiplicación** de $\boldsymbol{f(x) \cdot g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x) = 4x - 4}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 2x + 1}$

$$\begin{aligned} f(x) \quad \cdot \quad g(x) \quad &= \\ (4x-4)\cdot(x^2-2x+1) \quad &= \\ 4x^3 - 8x^2 + 4x - 4x^2 + 8x - 4 \quad &= \\ 4x^3 - 8x^2 - 4x^2 + 4x + 8x - 4 \quad &= \\ \boldsymbol{4x^3 - 12x^2 + 12x - 4} \end{aligned}$$

3.4. División de funciones

Se denota por:

$$\boldsymbol{f(x)/g(x) = (f/g)(x)}$$

Realizamos la **división de funciones** de la misma manera en que realizamos la división de: **dos monomios**, **polinomio entre monomio** o **dos polinomios**, según sea el caso, tal como aprendimos en el curso de Álgebra, obedeciendo las reglas correspondientes.

Ejemplo:

Realiza la **multiplicación** de $\boldsymbol{f(x)/g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9x}$ y $\boldsymbol{g(x) = 3x}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$\frac{3x^3 - 6x^2 + 9x}{3x} =$$

$$\frac{3x^3}{3x} - \frac{6x^2}{3x} + \frac{9x}{3x} =$$

$$\boldsymbol{x^2 - 2x + 3}$$

I. Realiza las siguientes operaciones con funciones:

- $\boldsymbol{f(x)+g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=x+1}$ y $\boldsymbol{g(x)=x^2-2x+5}$

- $\boldsymbol{f(x)-g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=x^2+7x-4}$ y $\boldsymbol{g(x)=x^2-3x+13}$

- $\boldsymbol{f(x)\cdot g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=2x-3}$ y $\boldsymbol{g(x)=x+1}$

- $\boldsymbol{f(x)/g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=20x^4+15x^3-10x^2+5x}$ y $\boldsymbol{g(x)=5x}$

Cierre

En este parcial has aprendido acerca de las **funciones**: su **definición**, **clasificación**, sus **gráficas** y cómo obtener su **dominio** y **rango**. También aprendiste acerca de las **sucesiones numéricas** y cómo obtener **la función que describe su comportamiento**, así como a identificar las **regiones de crecimiento y decrecimiento**. Finalmente, aprendiste que se pueden realizar **operaciones con funciones**, tales como: **suma**, **resta**, **multiplicación** y **división**.

Ahora te toca poner en práctica todo lo aprendido y resolver los ejercicios que se presentan a continuación:

ACTIVIDAD 1

Funciones: clasificación, dominio y rango

I. Llena la tabla de la siguiente página con los datos correspondientes a las funciones que se presentan.

Sigue las indicaciones que aparecen a continuación:

- En la columna **CLASIFICACIÓN** escribe si la función es “Algebraica” o “Trascendental”.
- En la columna **TIPO** escribe si la función es lineal, cuadrática, exponencial, etc.
- En la columna **DOMINIO** escribe en forma de **intervalo** el dominio correspondiente a la función.
- En la columna **RANGO** escribe en forma de **intervalo** el rango o imagen correspondiente a la función.

IMPORTANTE:

- Revisa con atención los ejemplos que aparecen en las secciones de **“Desarrollo”** y **“Actividades de aprendizaje”** de este libro de trabajo, ya que te ayudarán a obtener las respuestas correctas.
- Si tienes la posibilidad, ingresa a https://www.geogebra.org/calculator y obtén la **gráfica de las funciones**. Seguramente, esto te permitirá observar con mayor claridad cuál es el **dominio** y **rango** de cada función.
- **Anexa la gráfica correspondiente a cada función si el maestro así te lo solicita**.

FUNCIÓN	CLASIFICACIÓN	TIPO	DOMINIO	RANGO
$f(x) = 3\cos x$				
$f(x) = 2x^3 + 4x^2$				
$f(x) = \dfrac{x+2}{x}$				
$f(x) = \ln 2x$				
$f(x) = 5^x$				
$f(x) = 4x + 7$				
$f(x) = \sin 8x$				
$f(x) = -8$				
$f(x) = \sqrt{x+2}$				
$f(x) = x^2 + 1$				

ACTIVIDAD 2

Sucesiones numéricas, regiones de crecimiento y decrecimiento y operaciones con funciones

I. Encuentra la función que describe el comportamiento de las sucesiones numéricas que se presentan y escribe los siguientes tres términos de la sucesión.

a) $4, 10, 16,$ __ , __ , __ , …

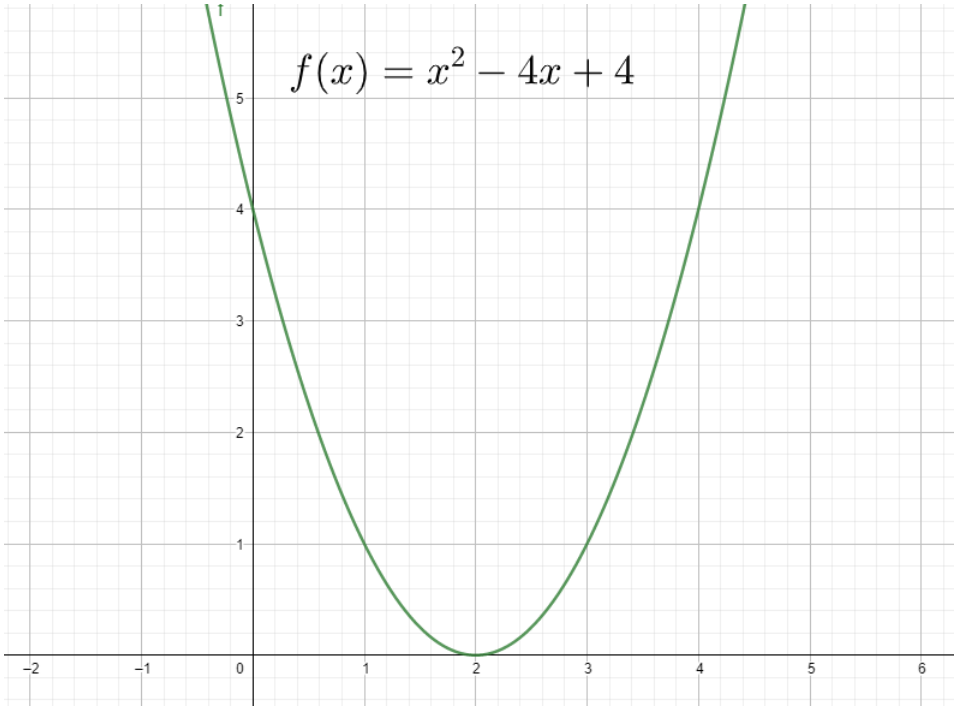
b) $60, 52, 44,$ __ , __ , __ , …

c) $10, 40, 160,$ __ , __ , __ , …

d) $729, 243, 81,$ __ , __ , __ , …

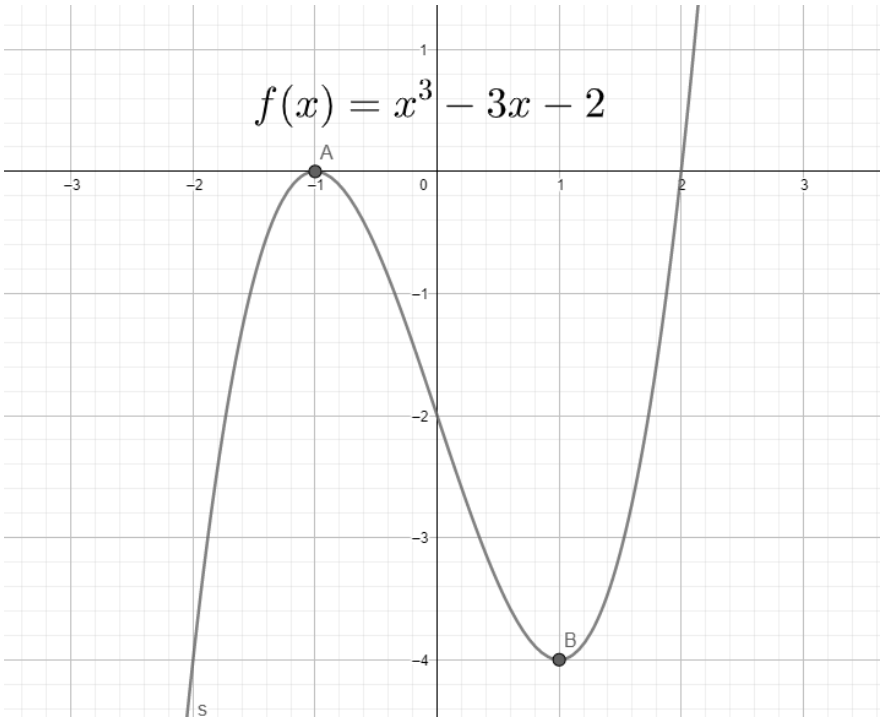
II. Observa las gráficas y determina las regiones de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a)



Región decreciente: _____ **Región creciente:** _____

b)



Región creciente: _____ **Región decreciente:** _____

III. Realiza las siguientes operaciones con funciones:

- $\boldsymbol{f(x)+g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=x^3+2x^2-6x+5}$ y $\boldsymbol{g(x)=4x^2+2x-13}$

- $\boldsymbol{f(x)-g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=3x^2+4x-11}$ y $\boldsymbol{g(x)=x^2+7x+9}$

- $\boldsymbol{f(x)\cdot g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=2x+4}$ y $\boldsymbol{g(x)=x^2+2x-1}$

- $\boldsymbol{f(x)/g(x)}$ donde $\boldsymbol{f(x)=15x^5+21x^4-3x^3+12x^2-6x}$ y $\boldsymbol{g(x)=3x}$

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS DEL ESTADO DE CAMPECHE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN CÁLCULO DIFERENCIAL ESCALA DE VALORES				
NOMBRE DEL ALUMNO:				
CARRERA:				**PARCIAL:** **PRIMERO**
CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE:** **IV**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO:** AE1	
PRODUCTO ESPERADO:	**ACTIVIDAD1.** Ejercicios para determinar la clasificación, dominio, rango y gráfica de funciones algebraicas y trascendentales.			

PLAN DE EVALUACIÓN			
NOMBRE	**TIPO**	**MOMENTO**	**PONDERACIÓN**
PROBLEMAS Y EJERCICIOS	**SUMATIVA**	**HETEROEVALUACIÓN**	**60%**

CRITERIOS POR EVALUAR	**NO CUMPLE**	**CUMPLE PARCIALMENTE**	**CUMPLE MAYORMENTE**	**SÍ CUMPLE**	**OBSERVACIONES:**
	Puntaje asignado				
	0	1	1.5	2	
1.- Clasifica de forma apropiada las funciones algebraicas y las trascendentales (20%).					
2.- Identifica de manera correcta el tipo de función que se le presenta (20%).					
3.- Determina y escribe de forma correcta el dominio de diversas funciones (20%).					
4.- Determina y escribe de forma correcta el rango de diversas funciones (20%).					
5.- Entrega los productos esperados de forma puntual, con limpieza y escritura legible (20%).					
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**

NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
DEL ESTADO DE CAMPECHE
INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
CÁLCULO DIFERENCIAL
ESCALA DE VALORES

NOMBRE DEL ALUMNO:

CARRERA:	**PARCIAL: PRIMERO**

CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE: IV**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO:** AE2, AE3 y AE4.

PRODUCTO ESPERADO:	**ACTIVIDAD 2.** Ejercicios de sucesiones numéricas y de identificación de regiones de crecimiento y decrecimiento de funciones. Ejercicios de operaciones con funciones polinomiales.

PLAN DE EVALUACIÓN

NOMBRE	**TIPO**	**MOMENTO**	**PONDERACIÓN**
PROBLEMAS Y EJERCICIOS	**SUMATIVA**	**HETEROEVALUACIÓN**	**40%**

CRITERIOS POR EVALUAR	**NO CUMPLE**	**CUMPLE PARCIALMENTE**	**CUMPLE MAYORMENTE**	**SÍ CUMPLE**	**OBSERVACIONES:**
	Puntaje asignado				
	0	1	1.5	2	
1.- Determina de forma apropiada la función que describe el comportamiento de una sucesión aritmética (20%).					
2.- Determina de forma apropiada la función que describe el comportamiento de una sucesión geométrica (20%).					
3.- Identifica y escribe de forma correcta las regiones de crecimiento y decrecimiento de una función (20%).					
4.- Realiza de forma correcta las operaciones con funciones: suma, resta, multiplicación y división (20%).					
5.- Entrega los productos esperados de forma puntual, con limpieza y escritura legible (20%).					
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**

NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA

Libros

Cuéllar, J. (2012). *Matemáticas V*. México: McGraw-Hill.

Gil, J., Díaz, R. (2013). *Cálculo diferencial para cursos con enfoque por competencias*. México: Pearson.

Sánchez, O. (Coord.). (2018). *Cálculo diferencial*. México: KeepReading.

Páginas Web

Cabrejos, M. (2021, 23 mayo). *Sucesiones numéricas - Matemath | DE 0 A 100*. Matemath. Recuperado 12 de enero de 2022, de https://matemathweb.com/razonamiento-matematico/sucesiones-numericas/

Castrillón Jiménez, E. A. (2016). *Cálculo diferencial: dominio y rango de una función.* proyectodescartes.org. Recuperado 12 de enero de 2022, de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Libro_Dominio_Rango-JS/indexb.html

Colaboradores de los proyectos Wikimedia. (2019, 3 mayo). *Sucesiones numéricas. Progresiones*. Wikiversidad. Recuperado 12 de enero de 2022, de https://es.wikiversity.org/w/index.php?title=Sucesiones_num%C3%A9ricas._Progresiones&oldid=146904

Global, E. I. (2021, 16 diciembre). ▷ *Dominio y Rango de una Función-7 ejercicios resueltos*. IG. Recuperado 12 de enero de 2022, de https://informeglobal.com/ejercicios-dominio-rango-de-una-funcion/

Osorio, M., Rivera, N., & Clausse, J. (s. f.). *CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES A*. GeoGebra. Recuperado 12 de enero de 2022, de https://www.geogebra.org/m/zauxpaej

Salazar, J. L. A. (2011, 10 mayo). *Dominio y rango de una función*. Monografias.com. Recuperado 12 de enero de 2022, de https://www.monografias.com/trabajos-pdf4/dominio-y-rango-funcion/dominio-y-rango-funcion

Tipos de funciones. (s. f.). matematicasonline.es. Recuperado 12 de enero de 2022, de https://www.matematicasonline.es/pdf/Temas/1BachCT/Tipos%20de%20funciones.pdf