CECyTE Campeche

Trabajos Colegiados Estatales Virtuales

CÁLCULO DIFERENCIAL

Gabriel Enrique Peralta Horta
Silvia Eduviges Villegas Ávalos
Helbert Andrei Guzmán Cámara

CECyTE Campeche

PRESENTACIÓN

Querido alumno:

En la familia CECyTEC tenemos un gran compromiso, la enorme tarea de que ustedes, nuestros alumnos, logren sus metas y sus objetivos. Con estos libros de trabajo estamos dándoles las herramientas que les permitan desarrollar sus conocimientos y habilidades para tener un buen desempeño académico.

Dedícate tiempo de manera inteligente para desarrollar tus habilidades y destrezas. Ten muy claras tus metas. Recuerda que solo con educación podemos construir un futuro prometedor, un mejor país, un mejor estado, un mejor municipio y una mejor familia.

Aprende a soñar. Lucha por tus sueños. Te auguro que serás siempre un triunfador.

¡Estás a muy poco de lograr el éxito!

Mtra. Margarita Nelly Duarte Quijano

Directora General del CECyTEC

Libro de Trabajo
Febrero - Julio 2022

Cálculo Diferencial

Tercer Parcial

Plantel: _____

Nombre del Alumno: _____

Carrera: _____

Semestre: _____ Grupo: _____

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Campeche

Eje:
Pensamiento y lenguaje variacional.

Componentes:
Cambio y predicción: elementos del cálculo.

Contenido central:

- Uso de las derivadas en diversas situaciones contextuales (derivadas de funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas, trigonométricas).
- Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función. Criterios de optimización; Criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.
- Nociones básicas de derivación de orden uno y orden dos (primera y segunda derivada).
- Optimización y graficación de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).

Contenido específico:

- Calcular derivadas de funciones mediante técnicas diversas (derivadas de funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas).
- Determinar el máximo o el mínimo de una función mediante los criterios de la derivada ¿Dónde se crece más rápido?
- Encontrar los puntos de inflexión de una curva mediante el criterio de la segunda derivada. ¿Cómo se ve la gráfica en un punto de inflexión?, ¿Podrías recortar el papel siguiente esa gráfica?, ¿qué observas?
- Reconocer las propiedades físicas como posición, velocidad y aceleración y su correspondencia con la función, la derivada primera y la segunda derivada de una función. Interpretación física de los puntos singulares.
- Calcular derivadas sucesivas de funciones polinomiales y trigonométricas mediante algoritmos, no mayor a la tercera derivada. ¿Existen caminos directos para derivar?, ¿qué métodos conocemos?

Aprendizajes esperados:

- **AE1.** Utiliza procesos para la derivación y representan a los objetos derivada y derivada sucesiva como medios adecuados para la predicción local.
- **AE2.** Calcula y resuelve operaciones gráficas con funciones para analizar el comportamiento local de una función (los ceros de f, f’ y f’’). En algunos casos, se podrán estudiar los cambios de f’’ mediante la tercera derivada.
- **AE3**. Localiza los máximos, mínimos, las inflexiones de una gráfica para funciones polinomiales y trigonométricas.

Apertura

Hasta ahora, hemos aprendido a diferenciar una variedad de funciones; en esta sección, exploraremos derivadas de funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Las funciones exponenciales juegan un papel importante en el modelado del crecimiento de la población y la descomposición de los materiales radiactivos.

Las funciones logarítmicas pueden ayudar a reescalar grandes cantidades y son particularmente útiles para reescribir expresiones complicadas.

Las funciones trigonométricas se utilizan para modelar muchos fenómenos, incluidos las ondas de sonido, las vibraciones de las cuerdas, la corriente eléctrica alterna y el movimiento de los péndulos. De hecho, casi cualquier movimiento repetitivo o cíclico puede ser modelado por alguna combinación de funciones trigonométricas.

Antes de empezar con las fórmulas de derivación de funciones trascendentes, recordemos algunos conceptos básicos sobre el tema.

- **Ecuaciones Exponenciales.** Toda ecuación que contiene a la incógnita como exponente se llama *exponencial*.

Para el uso de las funciones exponenciales es necesario considerar:

$a^x = e^{x \ln a}$ $\qquad$ $\text{Log}_a x = \frac{\ln a}{\ln x}$

- **Ecuaciones logarítmicas.** Toda ecuación que incluye el logaritmo de una función de la variable se le llama *ecuación logarítmica*.
- **El numero *e*.** Es conocido como el ***número de Euler*** y se expresa como *e* = 2.718…; ***e*** es la base de los logaritmos naturales o neperianos.

- **Logaritmos vulgares o decimales.** Los logaritmos decimales o vulgares son los que tiene base 10. Se representa por **log *x***. El logaritmo decimal de x, *log x* es la potencia a la que se debe elevar 10 para obtener x. cuando se emplea este tipo de logaritmos se acostumbra a omitir el número 10 de la base en la escritura abreviada del logaritmo de un numero:

log 10 = 1	$10^1 = 10$
log 1,000 = 3	$10^3 = 1{,}000$
log (1/10,000)	$10^{-4} = 1 / 10{,}000$

- **Logaritmos naturales, neperianos o hiperbólicos.** Los logaritmos naturales o neperianos son los que tiene base ***e***. Se representan por **ln(x) o Ln(x)**. el logaritmo neperiano de x, *ln(x)* es la potencia a la que debe elevar e para obtener x.

Ln 1 = 0 $\qquad$ $e^0 = 1$

Cuando se trabaja con funciones trigonométricas hay que recordar su relación entre radianes y grados sexagesimales.

$$1° = \frac{\pi}{180}\ radianes \qquad 1\ radian = \frac{180}{\pi}\ grados$$

Desarrollo

Derivada de funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas y trigonométricas básicas)

1.1. Derivada de las funciones exponenciales

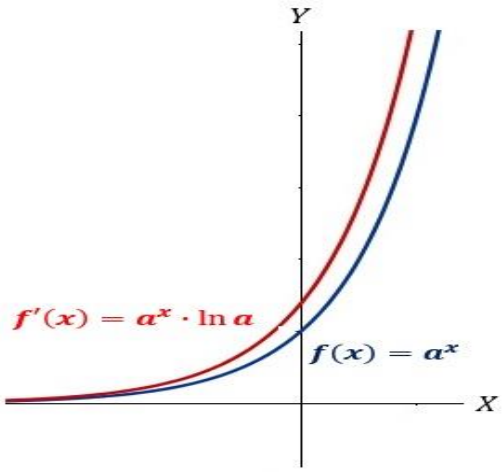
1.1.1. Derivada de la función exponencial a^u

La derivada de funciones exponenciales es igual a la misma función por el logaritmo natural (neperiano) de la base por la derivada del exponente:

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u\,(ln\ a)(u')$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\,(ln\ a)$$

Esto se puede ejemplificar en la siguiente gráfica:



- **Ejemplos de derivadas exponenciales a^u**

❶ $f(x) = 5^{3x+6}$

$[\, f(x) = a^u \,]$

Identificando los valores para relacionarlos con la formula, tenemos:
$a = 5;$ $u = 3x + 6$ $u' = 3$

Aplicando la fórmula $f(x) = a^u \longrightarrow f'(x) = a^u * \ln a * u'$

$$\mathbf{f'(x) = 5^{3x+6} * \ln(5)*(3)}$$

❷ $f(x) = 9^{\sqrt{5x}}$ $a = 9;$ $u = \sqrt{5x}$ $u' = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$

$$\mathbf{f'(x) = 9^{\sqrt{5x}} * \ln(9) * \frac{5}{2\sqrt{5x}}}$$

❸ $f(x) = 10^{(x^2+5x-6)}$ $a=10;$ $u = x^2 + 5x - 6$ $u' = 2x + 5$

$$\mathbf{f'(x) = 10^{(x^2+5x-6)} * \ln(10) * (2x + 5)}$$

❹ $f(x) = 3^{2x^2} * \sqrt{x}$

En este caso, tenemos una derivada la cual puede trabajarse como el producto de una función exponencial por una función radical, de la forma f(x) = g(x) * h(x) y de la cual su derivada es f´(x) = g(x)*h´(x) + h(x)*g´(x)

De la función exponencial tenemos:

$g(x) = 3^{2x^2}$ función de la forma: $g(x) = a^u$ $g'(x) = a^u * \ln(a) * u'$
$a = 3$ $u = 2x^2$ $u' = 4x$ $g'(x) = 3^{2x^2} * \ln(3) * 4x$
$h(x) = \sqrt{x}$ función radical, cuya derivada es: $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Sustituyendo estas derivadas:
$f'(x) = g(x)*h'(x) + h(x)*g'(x) = 3^{2x^2} * \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} * (3^{2x^2} * \ln(3) * 4x)$

Factorizando y simplificando:

$$\mathbf{f'(x) = 3^{2x^2}\,(4x * \ln(3) * \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})}$$

❺ $y = 10^{nx}$ $a = 10$ $u = nx$ $u' = n$

$y' = 10^{nx} \cdot \ln(10) \cdot n$ $\mathbf{y' = n \cdot 10^{nx} \cdot \ln(10)}$

Actividades de aprendizaje

I. Determina las derivadas de las siguientes funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^u$

① $f(x) = -3^{4x^2}$

② $y = 7^{4x + x^3}$

③ $f(x) = 4^{x^{-2}}$

④ $f(x) = 2^{\frac{1}{3}x}$

⑤ $f(x) = 5^{4x^3}$

⑥ $f(x) = x^2 * 3^{x^2}$

1.1.2. Derivada de la función exponencial e^u

La derivada de una función exponencial de base e es más sencilla que la derivada de una función exponencial de base 10, ya que el logaritmo natural de **e** es igual a 1, de modo que la fórmula directa queda de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u(u')$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

- ✓ **Videos de sugerencia:**

https://www.youtube.com/watch?v=zcs6JXHZQtI
https://www.youtube.com/watch?v=jb5H8r4-LfU

- **Ejemplos de derivadas exponenciales e^u**

❶ $f(x) = e^{-3x+4}$

Función de la forma: $f(x) = e^u$ cuya derivada es: $f'(x) = e^u * u'$

Entonces tenemos que $u = -3x + 4$; $u' = -3$

Por lo tanto, la derivada es: $f'(x) = e^{-3x+4} *(-3)$

$$\mathbf{f'(x) = -3\, e^{-3x+4}}$$

❷ $y = e^{\frac{-4}{7}x}$ $u = \frac{-4}{7}x$ $u' = \frac{-4}{7}$

$$\mathbf{y' = \frac{-4}{7}\, e^{\frac{-4}{7}x}}$$

❸ $f(x) = e^{x^2}$ $u = x2$ $u' = 2x$

$$\mathbf{f'(x) = 2x\, e^{x^2}}$$

❹ $y = e^{(2x^3)^{\frac{1}{2}}}$ $u = (2x^3)^{\frac{1}{2}}$

$u' = \frac{1}{2}(2x^3)^{\frac{-1}{2}}(6x^2) = 3x^2 \cdot (2x^3)^{\frac{-1}{2}} = 3x^2 \cdot \frac{1}{(2x^3)^{\frac{1}{2}}} = 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^3}} = \frac{3x^2}{x\sqrt{2x}} = \frac{3x}{\sqrt{2x}}$

$$\mathbf{y' = \frac{3x}{\sqrt{2x}}\, e^{(2x^3)^{\frac{1}{2}}}}$$

❺ $f(x) = e^{(5x^2-9x)^3}$ $u = (5x^2 - 9x)^3$ $u' = 3(5x^2 - 9x)^2(10x - 9)$

$$\mathbf{f'(x) = e^{(5x^2-9x)^3} \cdot 3(5x^2 - 9x)^2 \cdot (10x - 9)}$$

I. Determina las derivadas de las siguientes funciones exponenciales de la forma $f(x) = e^u$

① $f(x) = e^{-5x}$

② $f(x) = e^{2x^2}$

③ $f(x) = e^{\frac{5}{x}}$

④ $f(x) = e^{4x} + x^3$

⑤ $f(x) = x^5 * e^{3x^2}$

⑥ $f(x) = e^x (x^3 + 4)$

1.2. Derivada de la función logarítmica

Los logaritmos pueden estar en diferentes valores de base, sin embargo los matemáticos solamente han elegido dos tipos, **los logaritmos en base 10 y los logaritmos naturales.**

Logaritmos en base 10: Son logaritmos también llamados *logaritmos vulgares* o *logaritmos decimales*, están representados por el símbolo ***log*** **y** por lo general no se le coloca la base, pues se entiende que está en base diez (10).

$\text{Log}_e\, x = \ln x$

Logaritmos naturales: Estos logaritmos están representados simbólicamente como ***ln*** **y** su base es el número *e* cuyo valor irracional es de 2.718281828…

- **Propiedades de los logaritmos:**

decimales	naturales
$\log 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
$\log 10 = 1$	$\ln e = 1$
$\log 10^n = n$	$\ln e^n = n$
$\log (x * y) = \log (x) + \log (y)$	$\ln (x * y) = \ln (x) + \ln (y)$
$\log (x / y) = \log (x) - \log (y)$	$\ln (x / y) = \ln (x) - \ln (y)$
$\log x^n = n \log x$	$\ln x^n = n \ln x$
$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x$	$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$

Derivada del logaritmo decimal.

$$\frac{d}{dx}(log_a u) = \frac{u'}{u}\ log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{ln\ a} = \frac{u'}{u \cdot ln\ a}$$

Derivada del logaritmo natural. La derivada de un logaritmo natural (o logaritmo neperiano) es el cociente de la derivada del argumento del logaritmo dividido entre la función del argumento.

$$\frac{d}{dx}(ln\, u) = \frac{u'}{u}$$

Nota: en muchos casos es preferible aplicar algunas propiedades de los logaritmos antes de derivar.

- **Ejemplos de derivadas logarítmicas**

❶ f(x) = ln (8x + 3) u = 8x + 3; u´= 8 $\frac{d}{dx}(ln\, u) = \frac{u'}{u}$

f ´(x) = $\frac{8}{8x+3}$

❷ f(x) = $\log_{10}$ (x^2 + 4x + 1) (logaritmo decimal de base 10)

u = x^2 + 4x + 1 u´= 2x + 4

fórmula: $\frac{d}{dx}(log_a u) = \frac{u'}{u}\ log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{ln\ a} = \frac{u'}{u \cdot ln\ a}$

f ´(x) = $\frac{2x+4}{(x^2+4x+1)\ln 10}$

❸ f (x) = $\log_2$ (x^4 – 3x) (en este caso, el logaritmo decimal es de base 2)

Usamos la misma fórmula del ejemplo anterior: $\frac{d}{dx}(log_a u) = \frac{u'}{u}\ log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{ln\ a} = \frac{u'}{u \cdot ln\ a}$

u = x^4 – 3x u´= $4x^3$ – 3

f ´(x) = $\frac{4x^3-3}{x^4-3x}\ log_2 e = \frac{4x^3-3}{(x^4-3x)\ln 2}$

❹ $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

En este caso conviene primero aplicar una de las propiedades de los logaritmos
$\ln(x / y) = \ln(x) - \ln(y)$

Por lo tanto la función quedaría como: $f(x) = \ln(1 - x) - \ln(1 + x)$

Tenemos una función de la forma: $f(x) = g(x) - h(x)$

Derivando cada una de estas funciones y desarrollando obtenemos:

$f(x) = \ln u \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$

$g(x) = \ln(1 - x)$ $\quad g'(x) = \frac{-1}{1-x}$ $\quad h(x) = \ln(1 + x)$ $\quad h'(x) = \frac{1}{1+x}$

Sustituyendo:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1(1+x) - 1(1-x)}{(1-x)(1+x)}$$

Se aplican los productos del numerador, y en el denominador tenemos una diferencia de cuadrados:

$$f'(x) = = \frac{-1-x-1+x}{1-x^2}$$ simplificando

$$\mathbf{f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}}$$

❺ $y = x^5 \cdot \ln x$

Esta función es un producto de funciones

$F(x) = u*v$ $\quad f'(x) = uv' + vu'$

$u = x^5$ $\quad u' = 5x^4$ $\quad v = \ln x$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$y' = x^5 * \frac{1}{x} + \ln x\,(5x^4) = \frac{x^5}{x} + 5x^4 \ln x = x^4 + 5x^4 \ln x$
(Se tiene como factor común: x^4)

$y' = x^4(1 + 5 \cdot \ln x)$

I. Determina las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas

① $f(x) = \ln 3x$ ② $f(x) = \ln 2x^3$

③ $f(x) = \ln 3x * \sqrt{x^2 + 5}$ ④ $f(x) = \ln \frac{x}{x+2}$

⑤ $f(x) = x^3 \ln x$ ⑥ $f(x) = \ln \sqrt{7 - x^2}$

1.3. Derivada de funciones trigonométricas (básicas)

Uno de los tipos de movimiento más importantes en física es el movimiento armónico simple, que se asocia con sistemas tales como un objeto con masa que oscila en un resorte. El movimiento armónico simple se puede describir mediante el uso de la funciones seno o coseno. En esta sección ampliamos nuestro conocimiento de fórmulas de derivadas para incluir derivadas de estas y otras funciones trigonométricas.

Antes de aplicar alguna fórmula de derivación, es importante analizar la función y de ser posible aplicar alguna de las identidades trigonométricas para facilitar dicha derivación.

Derivada de la función seno: $\frac{d}{dx} sen(u) = cos(u) * u'$

Derivada de la función coseno: $\frac{d}{dx} cos(u) = -sen(u) * u'$

Derivada de la función tangente: $\frac{d}{dx} tan(u) = sec^2(u) * u'$

Derivada de la función cotangente: $\frac{d}{dx} cot(u) = -csc^2(u) * u'$

Derivada de la función secante: $\frac{d}{dx} sec(u) = sec(u) * tan(u) * u'$

Derivada de la función cosecante: $\frac{d}{dx} csc(u) = -csc(u) * cot(u) * u'$

- **Ejemplos de derivadas trigonométricas**

❶ $f(x) = \text{sen}\,(4x^3)$

Es una función de la forma $f(x) = \text{sen}\,(u)$. Entones $u = 4x^3$ y su deriva $u' = 12x^2$

Aplicando la fórmula de la deriva del seno: $f'(x) = \cos(u)*u'$

Entonces la deriva queda como:

$f'(x) = \cos(4x^3)\,(12x^2)$

Ordenando la derivada queda:

$$\mathbf{f'(x) = 12x^2 * \cos(4x^3)}$$

❷ $y = \text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Esta función puede interpretarse como:

$y = \left(sen\,\frac{x}{2}\right)^2$

Tenemos así una función de la forma $y = u^n$; cuya derivada es $y' = nu^{n-1}*u'$

$y' = 2u^{2-1}*\frac{d}{dx}u$

A su vez, dicha función "u" se deriva como una función trigonométrica:

$$\frac{d}{dx}sen(u) = cos(u) * u'$$

$$\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}\left(sen\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) * \frac{d}{dx}\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} * \frac{1}{2}$$

Sustituyendo:

$y' = 2\left(\text{sen}\,\frac{x}{2}\right) * \cos\frac{x}{2} * \frac{1}{2} = 2 * \frac{1}{2} * sen\,\frac{x}{2} * \cos\frac{x}{2}$

$\mathbf{y' = sen\,\frac{x}{2} * cos\,\frac{x}{2}}$

❸ $y = \tan(x^2 - 1)$

Se aplica directa la fórmula: $\frac{d}{dx}tan(u) = sec^2(u) * u'$

$u = x^2 - 1$ $\qquad$ $u' = 2x$

$y' = \sec^2(x^2 - 1)*(2x)$ $\qquad$ $\mathbf{y' = 2x*\sec^2(x^2 - 1)}$

❹ $f(x) = 5\cos(3x^2)$

En este caso, la constante 5 multiplica a la función *cos u*

$u = 3x^2$ $\quad u' = 6x$ $\quad$ fórmula: $\frac{d}{dx}cos(u) = -sen(u) * u'$

$f'(x) = 5[\frac{d}{dx}\cos u]$

$f'(x) = 5[-\operatorname{sen}(3x^2)\ (6x)]$

Hasta acá ya tenemos la derivada aun asi, se puede acomodar quedando:

$f'(x) = -30x[\operatorname{sen}(3x^2)]$

❺ $f(x) = \cot(4x^2)$ $\quad$ formula: $\frac{d}{dx}cot(u) = -csc^2(u) * u'$

$u = 4x^2$ $\quad u' = 8x$

$f'(x) = -\csc^2(4x^2) * (8x)$

$f'(x) = -8x * \csc^2(4x^2)$

❻ $f(x) = 7\sec\frac{x}{3}$ $\quad$ fórmula: $\frac{d}{dx}sec(u) = sec(u) * tan(u) * u'$

$f'(x) = 7[\frac{d}{dx}sec(u)]$ $\quad u = \frac{x}{3}$ $\quad u' = \frac{1}{3}$

$f'(x) = 7[\sec(u) * \tan(u) * u'] = 7\ [\sec(\frac{x}{3}) * \tan(\frac{x}{3}) * \frac{1}{3}]$

$f'(x) = \frac{7}{3} * \sec(\frac{x}{3}) * \tan(\frac{x}{3})$

❼ $f(x) = \cot^2(4x)$ $\quad$ fórmula: $\frac{d}{dx}cot(u) = -csc^2(u) * u'$

La función se representa por facilidad para derivar como:

$f(x) = \cot(4x)^2$

Se deriva como una función elevada a una potencia $f'(x) = nu^{n-1} * u'$; y posteriormente se aplica la derivada de la función cotangente

$f'(x) = 2 * \cot(4x) * \frac{d}{dx}\cot u$ $\quad u = 4x$ $\quad u' = 4;$

$f'(x) = 2\cot(4x) * [-\csc^2(4x) * (4)]$ $\quad$ ordenando:

$f'(x) = -8 * \cot(4x) * \csc^2(4x)$

❾ $f(x) = \frac{\cos x}{sen\ x}$

En este caso, nos conviene primero aplicar una identidad trigonométrica:
$\frac{\cos x}{sen\ x} = \cot x$

Entonces la función queda como $f(x) = \frac{\cos x}{sen\ x} = \cot x$

Y ya solo resta aplicar la fórmula directa de la deriva del a la función cotangente

$$\frac{d}{dx} cot(u) = -csc^2(u) * u'$$

$f'(x) = -\csc^2(x)$

Actividades de aprendizaje

I. Determina las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas

① $f(x) = \csc\left(\frac{x}{2}\right)$

② $f(x) = 4\tan(5x - 1)$

③ $f(x) = 4\cos(x^5)$

④ $f(x) = \tan(x^3 + 10x^2 - 4x)$

⑤ $f(x) = \tan\sqrt{x}$

⑥ $f(x) = \frac{1}{2}\ cos^2\ (5x)$

⑦ $f(x) = \tan(x)$ se4n (x)

⑧ $f(x) = x\ \text{sen}\ (3x)$

2.- Calculo de derivadas sucesivas de funciones polinomiales

La regla de las derivadas sucesivas (también llamadas de orden superior) es simplemente una extensión de las reglas anteriores. Es decir, a la derivada de la función original se le designa como primera derivada, pero es posible seguir derivando esta función resultante, obteniendo lo que se conoce como segunda derivada. Y así podríamos repetir el proceso hasta encontrar la tercera, cuarta, quinta, o incluso la *n* derivada. Para poder identificar en qué ciclo de derivada nos encontramos, es conveniente que nos acostumbremos a usar la siguiente notación:

F (x) es la función original
F ´(x) es la primera derivada
F´´ (x) es la segunda derivada
F´´´(x) es la tercera derivada
. .
. .
. .
f^{n} (x) es la n – ésima derivada

- **Ejemplos de derivadas sucesivas de funciones polinomiales**

Determinar la tercera derivada de las siguientes funciones:

❶ $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$ $\quad f''(x) = 12x - 30$ $\quad f'''(x) = 12$

❷ $f(x) = \frac{1}{x^3} \longrightarrow f(x) = x^{-3}$

$f'(x) = -3x^{-4}$ $\quad f''(x) = 12x^{-5}$ $\quad f'''(x) = -60x^{-6} = \frac{-60}{x^6}$

❸ $f(x) = \sqrt[3]{4-9x} \longrightarrow f(x) = (4-9x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(4-9x)^{\frac{-2}{3}}(-9) = -3(4-9x)^{\frac{-2}{3}}$

$f''(x) = (-3)\left(\frac{-2}{3}\right)(4-9x)^{\frac{-5}{3}}(-9) = 2(-9)(4-9x)^{\frac{-5}{3}} = -18(4-9x)^{\frac{-5}{3}}$

$f'''(x) = (-18)\left(\frac{-5}{3}\right)(4-9x)^{\frac{-8}{3}}(-9) = 30(4-9x)^{\frac{-8}{3}}(-9) = -270(4-9x)^{\frac{-8}{3}} = \frac{-270}{\sqrt[3]{(4-9x)^8}}$

❹ $f(x) = \cos(2x)$

$f'(x) = -\operatorname{sen}(2x)(2) = -2*\operatorname{sen}(2x)$

$f''(x) = -2[\cos(2x)(2)] = -4\cos(2x)$

$f'''(x) = -4[-\operatorname{sen}(2x)(2)] = 8\operatorname{sen}(2x)$

❺ $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+10}$

Para obtener la segunda derivada, se aplica la derivada de un cociente de funciones

$f''(x) = \frac{(x^2+10)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+10)^2} = \frac{2x^2 + 20 - 4x^2}{(x^2+10)^2} = \frac{-2x^2+20}{(x^2+10)^2}$

$f'''(x) = \frac{(x^2+10)^2(-4x) - (-2x^2+20)\,[\,2(x^2+10)\,(2x)\,]}{[(x^2+10)^2]^2} = \frac{(-4x)\,(x^2+10)^2 - (4x)\,(x^2+10)(-2x^2+20)}{(x^2+10)^4}$

$f'''(x) = \frac{(-4x)(x^2+10)\,[\,(x^2+10)+(-2x^2+20)\,]}{(x^2+10)(x^2+10)^3} = \frac{-4x\,[\,x^2+10-2x^2+20\,]}{(x^2+10)^3} = \frac{-4x(-x^2+30)}{(x^2+10)^3}$

Actividades de aprendizaje

I. Determina hasta la tercera derivada de las siguientes funciones polinomiales

① $f(x) = \cos(3x^2)$

② $f(x) = \frac{x-2}{x}$

③ $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

④ $f(x) = \frac{-1}{x}$

⑤ $f(x) = x^{\frac{3}{5}} + x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{-4}{3}}$

⑥ $f(x) = (4x2 - 9)\,(2x + 1)$

3. Aplicación de la derivada en física (posición, velocidad, aceleración)

En física, las derivadas se aplican en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación.

Se define la velocidad de un móvil como el cambio de posición que experimenta con respecto al tiempo en que se lleva a cabo el movimiento. Utilizando esta definición y la de la derivada se puede determinar la velocidad en un instante de tiempo determinado, por lo que se dice que:

- La **velocidad (*v*)** es igual a la derivada de la función de posición del móvil ***(s)*** con respecto al tiempo **(*t*)**.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

La posición se puede medir en metros, kilómetros, pies, millas, etc., y el tiempo en segundos, minutos u horas; por lo que la velocidad tendrá unidades de m/s, km/hr, ft/s, etcétera.

- De igual manera, la aceleración **(a)** es la variación de la velocidad **(v)** con respecto al tiempo **(t):**

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t)$$

Puesto que la velocidad puede ser dada en m/s, km/hr, ft/s, y el tiempo en segundos, minutos u horas; la aceleración tendrá unidades de m/s^2, km/hr^2, ft/s^2, etcétera.

Es importante mencionar que la aceleración también puede ser calculada como la segunda derivada de la posición del móvil con respecto al tiempo.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right) = s''(t)$$

En conclusión, la derivada de una **función distancia** es su función **velocidad**. La derivada de la función **velocidad** es su **aceleración**. La derivada de la **aceleración** es la **sobre aceleración**, la cual representa los cambios en la aceleración, y con ello se calculan los tirones que se dan en un movimiento, como los que se sienten en las subidas o bajadas de una montaña rusa.

Un objeto en movimiento rectilíneo *desacelera* cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos, y *acelera* cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

De manera alterna, un objeto *desacelera* cuando su rapidez $|v(t)|$ es decreciente y *acelera* cuando su rapidez es creciente.
Si *v(t)* > 0, la partícula va hacia la derecha. Si *v(t)* < 0 la partícula va hacia la izquierda. Si *v(t)* = 0, la partícula no se mueve. Si *v(t)* y *a(t)* son ambas cero la partícula no acelera ni desacelera.

- **Ejemplos**

❶ El espacio recorrido por un móvil está dado por la función $e(t) = 3t^2 - t + 1$.

El espacio se mide en metros y el tiempo en segundos.

(A) Hallar la ecuación de la velocidad

Para determinar la ecuación de la velocidad de debe derivar la función $e(t)$:

$$V(t) = e'(t) = 6t - 1$$

(B) Hallar la velocidad en el instante t = 0

Se sustituye el valor de "t" en la ecuación de la velocidad:

$$V(0) = 6t - 1 = 6(0) - 1 = -1 \text{ m/s}$$

(C) Hallar la ecuación de la aceleración

La ecuación aceleración es igual a la primera derivada de la función velocidad o a la segunda derivada de la función espacio:

$$A(t) = v'(t) = e''(t) = 6 \text{ m/s}^2$$

❷ La ruta de un globo aerostático es definida por la siguiente función de posición:
$s(t) = -t^3 + 12t^2 - 32t + 30$

Si la posición **s** está determinada en km y el tiempo **t** en horas determinar:

- La distancia recorrida por el globo después de 2 horas
- La función que representa la velocidad del globo
- La velocidad del globo después de 3 horas
- La función que representa la aceleración
- La aceleración después de 2 horas.

➢ Para encontrar la posición después de 2 horas se sustituye el t = 2 en la función de posición: $s(t) = -t^3 + 12t^2 - 32t + 30$
$s(2) = -(2)^3 + 12(2)^2 - 32(2) + 30 = 6.$
El globo después de 2 horas ha recorrido **6 Km**

➢ La función que representa la velocidad del globo se encuentra derivando la función de posición:
$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 24t - 32$

- Para encontrar la velocidad del globo después de 3 horas se sustituye el valor de t = 3 en la función velocidad
  $v(3) = -3(3)^2 + 24(3) - 32 = 13$
  La velocidad del globo después de 3 horas es de **13 km/hr**

- La función que representa la aceleración se encuentra derivando la función de velocidad:
  $a(t) = v'(t) = s''(t) = -6t + 24$

- Para encontrar la aceleración después de 2 horas se sustituye el t = 2 en la función de aceleración:
  $a(2) = -6(2) + 24 = 12$
  La aceleración del globo después de 2 horas es de **12 km/hr**

❸ Un móvil inicia su movimiento, acelera y hace un recorrido de 15 minutos según la ecuación $\mathbf{s = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100}$; si se mide el tiempo en minutos y el espacio en metros, calcula:

- La distancia que recorre el móvil
- Velocidad máxima que alcanza
- Distancia que recorre cuando su velocidad es máxima

Distancia que recorre en 15 minutos:

$s = f(t) = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$

$f(15) = 144(15)^2 - \frac{(15)^4}{4} + 100 = \underline{19,844 \text{ m}}$

Velocidad y aceleración:
Velocidad en un instante cualquiera:

$s = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$

$v = \frac{ds}{dt} = \left(288t - \frac{4t^3}{4}\right) m/min = 288t - t^3 \text{ m/min}$

Aceleración en un instante cualquiera:

$a = \frac{d^2s}{dt^2} = (288 - 3t^2) \text{ m/min}$

Para que la velocidad aumente y llegue a un máximo, debe haber aceleración (positiva) en el momento en que la aceleración es cero; y pueden suceder dos cosas: o el móvil mantiene su velocidad o empieza a disminuir; por esto, el punto crítico es cuando **a = 0**.

Tiempo crítico cuando a = 0:

$0 = 288 - 3t^2 \qquad 288 = 3t^2 \qquad t^2 = 288/3 = 96 \qquad t = \sqrt{96} = \mp 9.8 \text{ min}$

Tomamos el valor positive t = 9.8 min

- Velocidad máxima que alcanza el móvil:
  Analizamos en la aceleración:
  $a = \frac{d^2s}{dt^2} = (288 - 3t^2)$ con $t = 9.8$

Para un valor un poco menor, sea t = 9

$a = f''(t) = 288 - 3t^2$

$a = f''(9) = 288 - 3(9)^2 = 288 - 243 = 45$ signo (+)

Para un valor un poco mayor, sea t = 10

$a = f''(10) = 288 - 3(10)^2 = 288 - 300 = -12$ signo (-)

Como pasa de positivo a negativo concluimos que hay un máximo en t = 9.8

Velocidad máxima en t = 9.8:

$V(t) = 288t - t^3$

$v(9.8) = 288(9.8)^2 - (9.8)^3$

$v = 26{,}718.33 \text{ m/min}$

- Distancia que recorre en t = 9.98 min

  $s = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$

  $s = f(t) = 144t^2 - \frac{t^4}{4} + 100$

  $f(9.8) = 144(9.8)^2 - \frac{(9.8)^4}{4} + 100 = 11{,}624 \text{ m.}$

<u>Solución</u>: el móvil recorre 19,844 m en 15 minutos; a los 9.8 minutos alcanza su máxima velocidad de 26,718.33 m/min, habiendo recorrido 11,624 m

❹ La función de posición que describe un avión en cierta ruta es:
$s(t) = 6t^3 - 72t^2 + 192t + 200$

- ¿cuál es la distancia recorrida por el avión cuando la velocidad es de 300 km/h?
- ¿Cuál es la velocidad del avión cuando la aceleración es de 120 km/h?

- Para encontrar la distancia recorrida por el avión cuando la velocidad es de 300 km/h se hace lo siguiente:

  Se obtiene la función velocidad:
  $v(t) = s'(t) = 18t^2 - 144t + 192$

Se iguala la función velocidad a 300 y después se iguala a cero:

$v(t) = 18t^2 - 144t + 192$

$300 = 18t^2 - 144t + 192$

$0 = 18t^2 - 144t - 108$ Se resuelve la ecuación cuadrática:

$t = \frac{-(-144) \mp \sqrt{(-144)^2 - 4(18)(108)}}{2(18)}$ Las soluciones son $\mathbf{t_1 = -0.7;\ t_2 = 8.7}$

Se obtiene un tiempo negativo que no tiene un significado real, por lo que se toma el valor positivo obtenido y se sustituye en la función posición:

$s(8.7) = 6(8.7)^3 - 72(8.7)^2 + 192(8.7) + 200 = 6(658.5) - 72(75.69) + 1670.4 + 200$

$s(8.7) = 3{,}951 - 5{,}449.68 + 1{,}970.4$

$s(8.7) = 371.72$

La distancia recorrida por el avión cuando tiene una velocidad de 300 km/h es de 371.72 km

- Para encontrar la velocidad del avión cuando la aceleración es de 120 km/h^2 se hace los siguiente:

Se obtiene la función aceleración, que es igual a la segunda derivada de la función posición:

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 36t - 144$

Se iguala a 120 la función aceleración y se resuelve la ecuación:

$a(t) = 36t - 144$

$120 = 36t - 144$

$36t = 120 + 144 = 264$ $t = 264 / 36$ $\underline{t = 7.33}$

Se sustituye la t = 7.33 en la función velocidad:

$v(t) = 18t^2 - 144t + 192$

$v(7.33) = 18(7.33)^2 - 144(7.33) + 192 = 18(53.72) - 1{,}055.52 + 192$

$v(7.33) = \underline{103.44}$

La velocidad del avión cuando acelera a 120 km/h^2 es de **103.44 km/h**

I. Resuelve los siguientes problemas de aplicación de la derivada en física. Considerar la distancia en metros y el tiempo en segundos

① Sabemos que la aceleración se define como el cambio de la velocidad *v* en el tiempo *t*, es decir, a = dv/dt. Ahora si la velocidad en cierto sistema está determinado por la expresión $v(t) = 9t^2 - 5t$, entonces, ¿Cuál será el tiempo en el cual la velocidad es constante?

② La función posición de una partícula está dada por: $s(t) = (2t - 6)^2$. Encuentre la posición, velocidad, y aceleración en los instantes: t = ½ , t = 1, t = 4

③ La función posición de una partícula que se mueve sobre una recta horizontal es: $s\,(t) = t3 - 4t$.

a) ¿cuál es la aceleración de la partícula cuando v(t) = 2?
b) ¿cuál es la posición de la partícula cuando a(t) = 18?
c) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando s(t) = 0?

④ Calcula la velocidad, aceleración instantánea, y el espacio recorrido en dos segundos, del punto que se mueve rectilíneamente según la función $s\,(t) = t^2 - 4t + 5$

⑤ La función de posición de una partícula está dada por la expresión.

$s(t) = t3 - \frac{9}{2}t^2 - 7t$ con $t \geq 0$. Determina:

a) ¿cuándo alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?
b) ¿cuándo es cero la aceleración?

4. Cálculo de Máximos y Mínimos de una función

4.1. Criterio de la primera derivada

Se llama Criterio de la primera derivada al método o teorema utilizado frecuentemente en el cálculo matemático para determinar los mínimos y máximos relativos que pueden existir en una función mediante el uso de la primera derivada o derivada principal, donde se observa el cambio de signo, en un intervalo abierto señalado que contiene al punto crítico

"Sea ***c*** un punto crítico de una función ***f*** que es continua en un intervalo abierto ***I*** que contiene a ***c***. Si ***f*** es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en ***c***, entonces ***f(c)*** puede clasificarse como sigue."

1. Si ***f '(x)*** cambia de positiva a negativa en ***c***, entonces ***f*** tiene un máximo relativo en ***(c, f(c)).***

2. Si ***f '(x)*** cambia de negativa a positiva en c, entonces ***f*** tiene un mínimo relativo en ***(c, f(c)).***

3. Si ***f '(x)*** es positiva en ambos lados de ***c*** o negativa en ambos lados de ***c***, entonces ***f(c)*** no es ni un mínimo ni un máximo relativo.

Paso 1. Calcular la derivada de f(x).

Paso 2. Igualar **f '(x)** a cero y se resuelve la ecuación, las raíces obtenidas son los valores críticos para los cuales la función puede tener un máximo, un mínimo, o no existir ninguno de los dos

Paso 3. Analizamos en **f** ´. Elegir un número menor y un número mayor a cada valor crítico, estos puntos tienen que ser cercanos a los valores críticos. Evaluar **f '(x)** en los puntos elegidos.

Paso 4. Aplicar el criterio de la primera derivada. Si f ´(x) cambias de **Positivo a Negativo**, en dicho valor crítico se tiene un **máximo**; si f´(x) cambia de **Negativo a positivo**, en ese valor crítico se tiene un **Mínimo**. Si la derivada pasa de positivo a positivo, o de negativo a negativo, no podemos señalar en *ese punto crítico un máximo o un mínimo*.

Paso 5. Encontrar las coordenadas de los máximos y mínimos (si los hay), sustituyendo los valores críticos en la función original.

En un máximo relativo, la función pasa de creciente a decreciente: es decir, el valor de la derivada pasa de positiva a negativa. En un mínimo relativo, la función pasa de decreciente a creciente; es decir, el valor de la derivada pasa de negativa a positiva.

Una función es creciente en un punto dado si el valor de la primera derivada es positivo; y es decreciente si el valor de la misma primera derivada es negativo en ese punto dado.

- **Ejemplos. Aplicación del criterio de la primera derivada**

❶ Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$

- Se deriva la función: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$
- Se iguala a cero para obtener sus raíces. Para ello puede factorizarse o usar la formula general para resolución de ecuaciones cuadráticas

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$(3x - 5)(x + 1) = 0$

$3x - 5 = 0 \qquad x_1 = \frac{5}{3}$

$x + 1 = 0 \qquad x_2 = -1$

Se analizan en la derivada los valores, uno menor y otro mayor a cada una de las raíces o puntos críticos que se acaban de encontrar

- Analizando para $x_1 = \frac{5}{3}$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$

$f'(1) = 3(1)^2 - 2(1) - 5 = -4 \qquad -4 < 0$

$f'(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 5 = 3 \qquad 3 > 0$

Como la derivada pasa de negativo a positivo, hay un mínimo cuando $x = \frac{5}{3}$

Para determinar el valor de la ordenada de dicho punto mínimo, se sustituye el valor de $x = \frac{5}{3}$ en la función original:

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$

$f = \left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{3}\right) + 7 = \frac{17}{27}$

Las coordenadas del punto mínimo son $\left(\frac{5}{3}, \frac{17}{27}\right)$

Ahora analizamos para $x_2 = -1$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5$

$f'(-2) = 3(-2)^2 - 2(-2) - 5 = 11 \qquad 11 > 0$

$f'(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 5 = -5 \qquad -5 < 0$

Como la deriva pasa de positiva a negativa, hay un máximo cuando x = -1. Ahora se calcula su ordenada:

$F(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 5(-1) + 7 = 10$

Las coordenadas del punto máximo son (-1, 10)

Concluyendo, la función $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$ tiene un punto *mínimo* con coordenadas $\left(\frac{5}{3}, \frac{17}{27}\right)$ y un punto *máximo* con coordenadas (-1, 10)

❷ Una fábrica de bebidas reporta una notable disminución en las ventas de un jugo embotellado, por lo cual decide hacer una fuerte campaña publicitaria el total de ventas *v* (en millones de pesos) se puede aproximar desde que inició el año *t* (en meses) de acuerdo con la siguiente función: $V(t) = -2t^3 + 27t^2 - 108t + 150$

Determinar en qué momento se obtuvieron las ventas mínimas antes de la campaña y en qué momento se obtendrán las ventas máximas después de ella.

- Se obtiene la primer derivada de la función y se iguala a cero

$V(t) = -2t^3 + 27t^2 - 108t + 150$

$V'(t) = -6t^2 + 54t - 108$

$-6t^2 + 54t - 108 = 0$

- La ecuación cuadrática resultante se resuelve mediante la fórmula general para obtener los valores críticos de *t*:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(54) \pm \sqrt{(54)^2 - 4(-6)(-108)}}{2(-6)}$$

Los valores críticos resultantes son: $t_1 = 3$; $t_2 = 6$

- Se evalúan en v´(t) valores menores y mayores que los valores críticos y se sustituyen en la primer derivada:

Para el valor critico **$t_1 = 3$** se toma un valor menor t = 2 y uno mayor t = 4

$V'(t) = -6t^2 + 54t - 108$

$V'(2) = -6(2)^2 + 54(2) - 108$

$V'(2) = -24$ (decreciente)

$V'(t) = -6t^2 + 54t - 108$

$V'(4) = -6(4)^2 + 54(4) - 108$

$V'(2) = 12$ (creciente)

Debido a que el cambio es de Decreciente a Creciente, se tiene un ***mínimo*** en el valor critico t = 3

Para el valor critico **$t_2 = 6$** se toma un valor menor t = 5 y uno mayor t = 7

$V'(t) = -6t^2 + 54t - 108$

$V'(5) = -6(5)^2 + 54(5) - 108$

$V'(5) = -24$ (creciente)

$V'(t) = -6t^2 + 54t - 108$

$V'(7) = -6(7)^2 + 54(7) - 108$

$V'(7) = 12$ (decreciente)

Debido a que el cambio es de Creciente a Decreciente, se tiene un ***máximo*** en el valor critico t = 6

- Para obtener el valor de las ventas se sustituyen los valores críticos en la función original:

$V(t) = -2t^3 + 27t^2 - 108t + 150$

Para t = 3 $\quad v(3) = -2(3)^3 + 27(3)^2 - 108(3) + 150 = 15 \quad (3, 15)$

Para t = 6 $\quad v(6) = -2(6)^3 + 27(6)^2 - 108(6) + 150 = 42 \quad (6, 42)$

- ➢ Por lo tanto, en el mes 3 se obtuvieron la ventas mínimas cuyo valor fue de 15 millones de pesos, y en el mes 6 se obtuvieron las ventas máximas con un valor de 43 millones de pesos.

Actividades de aprendizaje

I. Encuentra los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones aplicando el criterio de la primera derivada

① $f(x) = x^2 - 2x - 5$

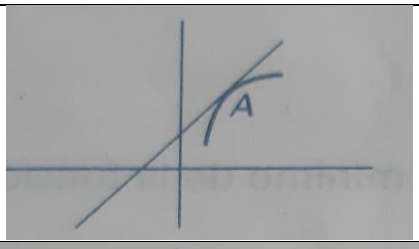
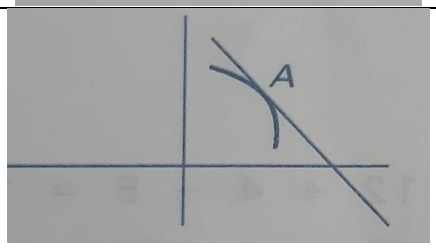
② $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 14x - 3$

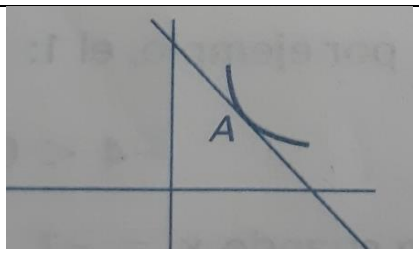
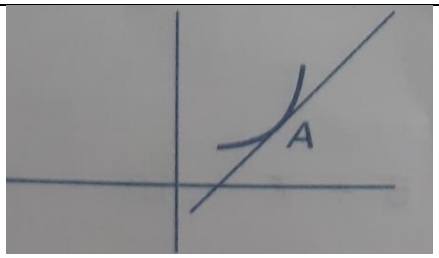
③ $f(x) = 5x\,(x - 2)^2$

④ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

4.2. Criterio de la segunda derivada

Observa las figuras siguientes. Una curva puede representar, respecto a su concavidad en un punto, los aspectos siguientes:

	En esta caso, en un entorno (en una proximidad) del punto A, la curva se conserva por debajo de la recta tangente; entonces decimos que la curva dirige su concavidad hacia abajo
	En un máximo relativo, la concavidad es hacia abajo, la derivada decrece y en consecuencia el valor de la segunda derivada es negativo

	En un entorno del punto A, la curva se conserva por encima de la recta tangente; entonces decimos que la curva dirige su concavidad hacia arriba
	En un mínimo relativo, la concavidad es hacia arriba, la derivada crece y en consecuencia la segunda derivada es positiva

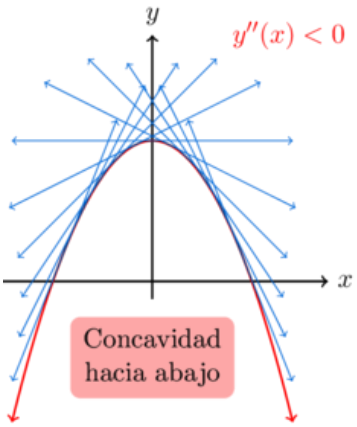
Calculo del sentido de concavidad de una función

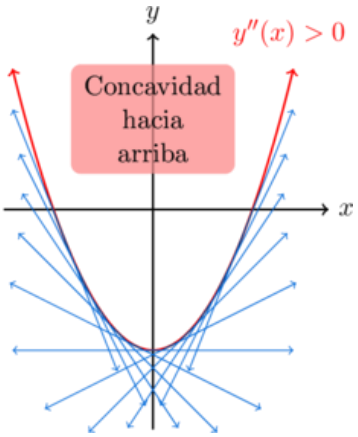
- Calculamos la primera y segunda derivada de la función
- El resultado de la segunda derivada lo igualamos a cero y obtenemos las raíces (puntos críticos).
- Analizamos en *f ” (x).* Sea la raíz x_1 si para un valor de x, tal que $x < x_1$ tenemos que el resultado es negativo, la curva es cóncava hacia abajo (∩). Si es positivo, la curva es cóncava hacia arriba (∪).
- En forma similar analizamos las otras raíces x_2, x_3, . . . obtenidas

<u>En conclusión:</u>

f´´(x) > 0 condición para que una curva sea cóncava hacia arriba
f´´(x) < 0 condición para que una curva sea cóncava hacia abajo (o convexa)
f ´´(x) = 0 entonces (x, f(x)) es un punto de inflexión

Algunas curvas son cóncavas hacia arriba o hacia abajo en todo su recorrido; otras, en algunos intervalos





Ejemplo: Calcula en que intervalos es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ Se calculan la primera y segunda derivada

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6$

$f''(x) = 12x - 6$

Igualamos a cero $f''(x)$ y obtenemos las raíces $x_1, x_2, \ldots$, en este caso únicamente tenemos x_1: $12x - 6 = 0$ $12x = 6$ $x_1 = ½$

Analizamos para un valor menor que $x_1 = ½$, por ejemplo, 0:

$f''(x) = 12x - 6$ $f''(0) = 12(0) - 6 = -6$

$-6 < 0$ es $\frown$ cóncava hacia abajo

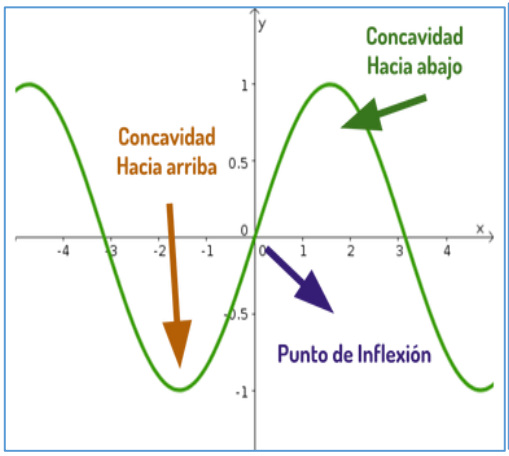
Ahora tomamos un valor mayor que $x_1 = ½$, por ejemplo, 1:

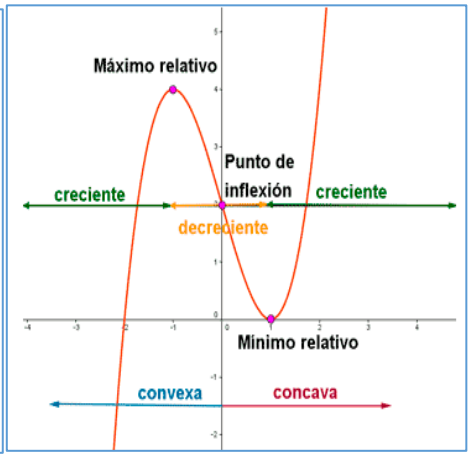
$f''(x) = 12x - 6$ $f''(1) = 12(1) - 6 = 6$

$6 > 0$ es $\smile$ cóncava hacia arriba

Conclusión: En el punto crítico $x = ½$ hay un cambio en el sentido de la concavidad ya que cualquier valor a la izquierda de él, el valor de $f''(x)$ es Negativa, en consecuencia es Cóncava hacia abajo ($\frown$) ; a la derecha del mismo punto $f''(x)$ es Positiva y la curva es Cóncava hacia arriba ($\smile$)

Puntos de inflexión





El ***punto de inflexión*** es aquel donde la curva de la función cambia el sentido de concavidad

Si la concavidad de una curva cambia de sentido, entonces la segunda derivada cambia de signo y en consecuencia es igual a cero en el punto de inflexión. De lo expuesto deducimos el criterio de la segunda derivada para calcular los puntos de inflexión de una función $y = f(x)$:

- Calculamos la primera y segunda derivadas de la función
- El resultado de la segunda deriva se iguala a cero y obtenemos las raíces.
- Analizamos en $f''(x)$. Sea la raíz x_1, si para un valor de x tal que $x < x_1$, y para otro valor de $x > x_1$ cambia de signo al sustituir los valores en $f''(x)$ entonces hay inflexión.

- En forma semejante analizamos las otras raíces x_2, x_3, . . . , obtenidas.
- Para obtener las coordenadas del punto de inflexión que corresponde al valor de $x = x_1$ calculamos el valor de la ordenada en la función original.

Ejemplo: Calcula los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7$

Determinas la primera y segunda derivada de la función:

$y' = 4x^3 + 6x^2$ $\qquad$ $y'' = 12x^2 + 12x$

Igualamos a cero la segunda derivada y obtenemos las raíces x_1 y x_2:

$12x^2 + 12x = 0$ $\qquad$ $12x(x+1) = 0$

$12x = 0,\quad x_1 = 0$ $\qquad$ $x + 1 = 0,\quad x_2 = -1$

Tenemos que los puntos críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$

Analizamos (en la misma segunda derivada):

- Para $x_1 = 0$ tomamos valores próximos a cero por la izquierda y por la derecha. Tomamos un valor menor que 0 y uno mayor que cero

$f''(-\frac{1}{2}) = 12(-\frac{1}{2})^2 + 12(-\frac{1}{2}) = 12\left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 3 - 6 = -3$ $\qquad$ $-3 < 0$

$f''(1) = 12(1)^2 + 12(1) = 12 - 12 = 24$ $\qquad$ $24 > 0$

Como cambia de signo la segunda derivada aceptamos que hay un punto de inflexión en $x = 0$.

- Continuamos el análisis, ahora para $x_2 = -1$

Tomamos un valor menor que -1 y uno mayor que -1, por ejemplo - 2 y - ½

$f''(-2) = 12(-2)^2 + 12(-2) = 12 - 12 = 24$ $\qquad$ $24 > 0$

$f''(-½) = 12(-½)^2 + 12(-½) = 3 - 6 = -3$ $\qquad$ $-3 < 0$

Como cambia de signo la segunda derivada aceptamos que hay un punto de inflexión en $x_2 = -1$

- Calculamos la ordenada de los puntos de inflexión en la función original con los valores de x_1, y de x_2.

  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7$

  Para $x1 = 0$ $\qquad$ $f(0) = 0^4 + 2(0)^3 - 7 = -7$

  Para $x2 = -1$ $\qquad$ $f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - 7 = -8$

<u>Las coordenadas de los puntos de inflexión son: (0, - 7) y (-1, - 8)</u>

Criterio de la segunda derivada para obtener los máximos y mínimos relativos de una función

A) Calculamos la primera y segunda derivadas de la función

B) El resultado de la primera derivada se iguala a cero y se resuelve la ecuación para obtener las raíces

C) Las raíces obtenidas x_1, x_2, x_3, . . . , se sustituyen en $f''(x)$

D) Si hecha la sustitución el valor de la Segunda derivada es Negativo, hay un máximo; si es Positivo, hay un mínimo.
E) Para obtener las coordenadas del Máximo o del Mínimo relativos, que corresponden a $x_1, x_2, x_3, \ldots$, calculamos el valor de la Ordenada en la función original.
F) Si el valor de la Segunda deriva es cero, no podemos decir si habrá máximo o mínimo o posiblemente no habrá ni máximo ni mínimo

CONCLUSION: Para obtener los Máximos y Mínimos relativos es más fácil aplicar el Criterio de la segunda Derivada; pero a veces no es posible aplicarlo porque resulta complicado obtener la segunda derivada o esta es igual a cero, entonces se aplicara el de la primera derivada

- **Ejemplos. Aplicación del criterio de la segunda derivada**

❶ Calcula los máximos y mínimos relativos; aplica el Criterio de la Segunda Derivada de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

- Calculamos la primera y segunda derivadas:

$y' = 6x^2 - 6x - 12$
$y'' = 12x - 6$

- Igualamos a cero la primera derivada y obtenemos las raíces:

$6x^2 - 6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0$
$X_1 = 2 \qquad x_2 = -1$

- Sustituimos en la segunda derivada

$y'' = 12x - 6$
$f''(2) = 12(2) - 6 = 24 - 6 = 18 \qquad 18 > 0$
$f''(-1) = 12(-1) - 6 = -12 - 6 = -18 \qquad -18 < 0$

- Como la segunda derivada es Positiva, se tiene un Mínimo en x = 2
  Como la segunda derivada es Negativa, se tiene un Máximo en x = -1

- Calculamos las ordenadas:

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$
si $x_1 = 2 \qquad y = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 2 = -18$
si $x_1 = -1 \qquad y = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 2 = 9$

<u>Las coordenadas del punto Mínimo es: (2, -18) y del punto Máximo (-1, 9)</u>

❷ Calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la siguiente función: $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$

- Se busca la primera y segunda derivada de la función

$y' = -3x^2 + 6x + 9$ $\qquad$ $y'' = -6x + 6$

- Se iguala a cero la Primera derivada y se hallan las raíces de la función

$-3x^2 + 6x + 9 = 0$ $\qquad$ $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$(-x - 1)(x - 3) = 0$

$-x - 1 = 0$ $\qquad$ $-x = 1$ $\qquad$ $\underline{x = -1}$

$x - 3 = 0$ $\qquad$ $\underline{x = 3}$ $\qquad$ Se tiene dos puntos críticos

- Se sustituyen las raíces o puntos críticos en las segunda derivada:

$f''(x) = -6x + 6$

$f''(-1) = -6(-1) + 6 = 6 + 6 = 12$ $\qquad$ $12 > 0$

$f''(3) = -6(3) + 6 = -18 + 6 = -12$ $\qquad$ $-12 < 0$

- Como la segunda derivada es positiva, se tiene un Mínimo en x = -1.
  Como la segunda derivada es negativa, se tiene un Máximo en x = 3

- Calculamos las ordenadas de los puntos max y/o min, sustituyendo los puntos críticos en la función original:

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$

$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 + 9(-1) + 1 = 1 + 3 - 9 + 1 = -4$

$f(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 + 9(3) + 1 = -27 + 27 + 27 + 1 = 28$

Por lo tanto, se tiene un <u>punto Mínimo</u> en <u>(-1, - 4),</u> y un <u>punto máximo</u> en <u>(3, 28)</u>

- Para hallar el <u>punto de inflexión</u>, la segunda derivada la igualamos a cero y obtenemos las raíces:

$y'' = -6x + 6$ $\qquad$ $-6x + 6 = 0$ $\qquad$ $-6x = -6$ $\qquad$ $\underline{x = 1}$

- Analizamos un valor menor y uno mayor al punto crítico en la segunda derivada:

$f''(x) = -6x + 6$

$f''(0) = -6(0) + 6 = 6$

$f''(2) = -6(2) + 6 = -6$ $\qquad$ Se tiene un cambio de signo en la segunda derivada, confirmando así, que tenemos punto de inflexión en $x = 1$

- Sustituimos el punto de inflexión en la función original:

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$

$f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 + 9(1) + 1 = -1 + 3 + 9 + 1 = 12$

Por lo tanto, las coordenadas del <u>punto de Inflexión</u> son <u>(1, 12)</u>

I. Encuentra los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones aplicando el criterio de la segunda derivada

① $f(x) = 2x^3 - 24x - 1$

② $f(x) = (x - 1)^3$

③ $f(x) = \frac{x^3}{27} - x$

④ $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

Cierre

En este parcial has aprendido ha como derivar funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas); así como también como realizar las derivadas sucesivas de funciones polinomiales.

También se trabajó con aplicaciones de la derivada en Física, como determinar la velocidad y aceleración de un móvil partir de su función posición. Por último, aprendiste a determinar máximos y mínimos de funciones aplicando el criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada.

Ahora te toca poner en práctica todo lo aprendido y resolver los ejercicios que se presentan a continuación:

Actividad1. Derivadas de funciones trascendentes y derivadas sucesivas de funciones polinomiales

I. Determina las derivadas de las siguientes funciones:

① $f(x) = \sqrt{5^{x^2}} + \sqrt{5^{x^2}}$

② $f(x) = 5^x - 5^{1-x}$

③ $f(x) = e^{4x^2} \cdot (5x^3 + 7x)$

④ $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$

⑤ $f(x) = \ln\left(\frac{4x^2+1}{x-2}\right)$

⑥ $f(x) = \ln\sqrt{3-2x^2}$

⑦ $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

⑧ $f(x) = \text{sen}^2(x-2)$

⑨ $f(x) = (\sec(5x) + \tan x)^3$

⑩ Determina la segunda derivada de la función:
$f(x) = \ln(4x^2 + 2x + 1)$

⑪ Determina la tercera derivada de la función:
$f(x) = -5x^2 + 6x + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{5}} + 4x^{-2} + 2$

Actividad2. Aplicación de la derivada en física.

I. Resuelve los siguientes problemas

⑫ Se ha determinado que la función de posición de un móvil es: $S(t) = t^3 - 9t + 20$
Si la posición está dada en metros y el tiempo en segundos, determina:
(I) La posición del móvil cuando la velocidad es de 0 m/s
(II) La velocidad del móvil cuando la aceleración es de 0 m/s

⑬ Dada la función de posición de un móvil, determina la velocidad y aceleración en los tiempos señalados. Considera la posición en metros y el tiempo en segundos.

$s(t) = -t(t-2)(t-5)^2 + 15$ para $t_1 = 0.5$; $t_2 = 3.5$; $t_3 = 4.5$

Actividad3. Localiza máximos y mínimos de una función

I. Determina los máximos y mínimos de las siguientes funciones según el método solicitado

⑭ Aplicando el criterio de la primera derivada: $f(x) = (3x-1)(3x+1)^2$

⑮ Aplicando el criterio de la segunda derivada: $f(x) = \frac{1}{1+3x^2}$

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS DEL ESTADO DE CAMPECHE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN CÁLCULO DIFERENCIAL ESCALA DE VALORES				
NOMBRE DEL ALUMNO:				
CARRERA:				**PARCIAL: TERCERO**
CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE: IV**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO: AE1**	
PRODUCTO ESPERADO:	**ACTIVIDAD1.** Ejercicios para determinar la derivada de funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas, trigonométricas) y derivadas sucesivas.			

PLAN DE EVALUACIÓN			
NOMBRE	**TIPO**	**MOMENTO**	**PONDERACIÓN**
PROBLEMAS Y EJERCICIOS	**SUMATIVA**	**HETEROEVALUACIÓN**	**40%**

CRITERIOS POR EVALUAR	**NO CUMPLE**	**CUMPLE PARCIALMENTE**	**CUMPLE MAYORMENTE**	**SÍ CUMPLE**	**OBSERVACIONES:**
	Puntaje asignado				
	0	5	7	9	
1.- Calcula correctamente las derivadas de las funciones exponenciales					
2.- Calcula correctamente las derivadas de las funciones logarítmicas					
3.- Calcula correctamente las derivadas de las funciones trigonométricas					
2.- Calcula correctamente las derivadas sucesivas de las funciones dadas					

5.- Entrega los productos esperados de forma puntual, con limpieza y escritura legible (4%).	(0)	(2)	(3)	(4)	
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**
NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA					

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS DEL ESTADO DE CAMPECHE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN CÁLCULO DIFERENCIAL ESCALA DE VALORES				
NOMBRE DEL ALUMNO:				
CARRERA:				**PARCIAL: TERCERO**
CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE: IV**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO:** AE2	
PRODUCTO ESPERADO:	**ACTIVIDAD2.** Ejercicios de aplicación en física (posición, velocidad, aceleración).			

PLAN DE EVALUACIÓN			
NOMBRE	**TIPO**	**MOMENTO**	**PONDERACIÓN**
PROBLEMAS Y EJERCICIOS	**SUMATIVA**	**HETEROEVALUACIÓN**	**30%**

CRITERIOS POR EVALUAR	**NO CUMPLE**	**CUMPLE PARCIALMENTE**	**CUMPLE MAYORMENTE**	**SÍ CUMPLE**	**OBSERVACIONES:**
	Puntaje asignado				
	0	4	5	6	
1.- Resuelve correctamente ejercicios sobre posición de un móvil					
2.- Resuelve correctamente ejercicios sobre velocidad de un móvil					
3.- Resuelve correctamente ejercicios sobre aceleración de un móvil					
4.- Determina correctamente los tiempos solicitados en los ejercicios de posición, velocidad, y aceleración					

5.- Entrega los productos esperados de forma puntual, con limpieza y escritura legible					
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**
NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA					

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS DEL ESTADO DE CAMPECHE INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN CÁLCULO DIFERENCIAL ESCALA DE VALORES				
NOMBRE DEL ALUMNO:				
CARRERA:				**PARCIAL: TERCERO**
CICLO ESCOLAR 2021-2022	**SEMESTRE: IV**	**GRUPO:**	**APRENDIZAJE ESPERADO:** AE3	
PRODUCTO ESPERADO:	**ACTIVIDAD3.** Ejercicios aplicando el criterio de la primera y segunda derivada			

PLAN DE EVALUACIÓN			
NOMBRE	**TIPO**	**MOMENTO**	**PONDERACIÓN**
PROBLEMAS Y EJERCICIOS	**SUMATIVA**	**HETEROEVALUACIÓN**	**30%**

CRITERIOS POR EVALUAR	**NO CUMPLE**	**CUMPLE PARCIALMENTE**	**CUMPLE MAYORMENTE**	**SÍ CUMPLE**	**OBSERVACIONES:**
	Puntaje asignado				
	0	5	7	9	
1.- Calcula correctamente los puntos máximos y/o mínimos de una función con el criterio de la primera derivada					
2.- Realiza el procedimiento completo paso a paso del criterio de la primera derivada, y agrega su grafica					
3.- Calcula correctamente los puntos máximos y/o mínimos de una función con el criterio de la segunda derivada					

4.- Realiza el procedimiento completo paso a paso del criterio de la segunda derivada, y agrega su grafica					
5.- Entrega los productos esperados de forma puntual, con limpieza y escritura legible					
PUNTAJE OBTENIDO POR NIVEL DE CUMPLIMIENTO:					**CALIFICACIÓN TOTAL:**
NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALÚA					

Calculo Diferencia para cursos con enfoque por competencias. Jorge Luis Sevilla, Rebeca Diaz Telles. Pearson.

Calculo Diferencial. Samuel Fuenlabrada. Mc Graw Hill

Calculo diferencia e intefgral. William Anthony Granville. Limusa