CECYTE Campeche

Trabajos Colegiados Estatales Virtuales

MATEMÁTICAS APLICADAS

Antonio Ix Chuc
Berny Cambranis Alfaro
José Ignacio Canché Arcos

CECyTE Campeche

PRESENTACIÓN

Querido alumno:

En la familia CECyTEC tenemos un gran compromiso, la enorme tarea de que ustedes, nuestros alumnos, logren sus metas y sus objetivos. Con estos libros de trabajo estamos dándoles las herramientas que les permitan desarrollar sus conocimientos y habilidades para tener un buen desempeño académico.

Dedícate tiempo de manera inteligente para desarrollar tus habilidades y destrezas. Ten muy claras tus metas. Recuerda que solo con educación podemos construir un futuro prometedor, un mejor país, un mejor estado, un mejor municipio y una mejor familia.

Aprende a soñar. Lucha por tus sueños. Te auguro que serás siempre un triunfador.

¡Estás a muy poco de lograr el éxito!

Mtra. Margarita Nelly Duarte Quijano

Directora General del CECyTEC

Libro de Trabajo
Febrero - Julio 2022

Matemáticas Aplicadas

Tercer Parcial

Plantel: _____

Nombre del Alumno: _____

Carrera: _____

Semestre: _____ Grupo: _____

Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Campeche

PROPÓSITO DE LA ASIGNATURA: Que el estudiante plantee y resuelva situaciones problemáticas que integren competencias y contenidos de todas las asignaturas del área, interpretando fenómenos naturales y sociales que suceden en su contexto.

COMPETENCIA DISCIPLINAR: Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

APRENDIZAJES ESPERADOS:

Aprendizaje 1.- Resuelve ejercicios contextualizados de Máximos y Mínimos aplicando el procedimiento de la segunda derivada.

Aprendizaje 2.- Resuelve ecuaciones logarítmicas con ayuda de sus propiedades.

Aprendizaje 3.- Resuelve ecuaciones exponenciales con ayuda de sus propiedades.

Apertura

APRENDIZAJE 1.- RESUELVE EJERCICIOS CONTEXTUALIZADOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS APLICANDO EL PROCEDIMIENTO DE LA SEGUNDA DERIVADA.

Supongamos que vamos viajando por una carretera de una zona montañosa por lo que nos encontramos subiendo y bajando con el carro. Ahora imaginemos que es la gráfica de una función, cuando la carretera alcanza la cima de una colina estamos en el punto más alto que todos los puntos cercanos, ahí hay un máximo local, pero es posible que haya otras colinas más altas por donde pasa el carro en la carretera antes o después, y lo mismo pasa cuando pasamos por la parte más baja de la carretera estaríamos en el punto más bajo que todos los puntos cercanos, ahí hay un mínimo local, ya que es posible que existan otros puntos más bajos por donde pasa el carro en la carretera antes o después.

De acuerdo, con la situación anterior nos hemos dado cuenta que existen mínimos y máximos que nos permiten conocer cuales son los valores limite de una función, pero antes de adentrarnos más en estos temas, debemos recordar un concepto que se manejo en la asignatura de Calculo Diferencial que se llama "**Derivada**", pero recordemos *¿Qué es una derivada?* la derivada de una función matemática es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación.

El proceso de derivación se puede realizar aplicando las siguientes fórmulas básicas directas de acuerdo al tipo de función que se requiera derivar:

Tabla 1. Fórmulas de Derivación.

Función	**Derivada**	**Ejemplo**	
		Función	Derivada
1) $\boldsymbol{f(x) = k}$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 7$	$f'(x) = 0$
2) $\boldsymbol{f(x) = ak}$	$f'(x) = a$	$f(x) = 9x$	$f'(x) = 9$
3) $\boldsymbol{f(x) = x^n}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = \boldsymbol{x^6}$	$f'(x) = 6x^5$
4) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[12]{\boldsymbol{x}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{12\sqrt[12]{x^{11}}}$
5) $\boldsymbol{f(x) = e^x}$	$f'(x) = \boldsymbol{e^x}$	$f(x) = \boldsymbol{e^x}$	$f'(x) = \boldsymbol{e^x}$
6) $\boldsymbol{f(x) = a^x}$	$f'^{(x)} = \boldsymbol{a^x} ln(a)$	$f(x) = 4^x$	$f'(x) = 4^x ln4$
7) $\boldsymbol{f(x) = ln\, x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \boldsymbol{ln\, x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

8) $\boldsymbol{f(x) = \mu v}$	$\boldsymbol{f'(x)} = \mu' v + \mu v'$	$\boldsymbol{f(x)} = (7x)\left(\sqrt{9x-3}\right)$	$f'(x) = 7\sqrt{9x-3} + \frac{63x}{2\sqrt{9x-3}}$
9) $\boldsymbol{f(x) = \mu^n}$	$\boldsymbol{f'(x) = n\mu^{n-1}\mu'}$	$\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{\boldsymbol{5x^2+2}}$	$f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{\boldsymbol{5x^2+2}}}$

ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA 1:

La idea fundamental de la actividad diagnóstica es que puedas distinguir, con la ayuda del instrumento de evaluación anexado, tus habilidades y áreas de mejora para que tengas una base sólida al inicio de este tercer parcial.

Resuelve las siguientes derivadas usando las fórmulas de derivación correspondiente:

$a)\ f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$

$b)\ f(x) = \frac{5x^2 - 7}{x^3 + 5x}$

$c)\ f(x) = \sqrt[3]{x}$

$d)\ f(x) = 2\sqrt{x+3}$

Saber	Si	No	Observaciones
Identifico las fórmulas correspondientes para determinar las derivadas solicitadas.			
Utilizo un procedimiento matemático ordenado para hallar la solución de los ejercicios.			
Obtengo la derivada resultante de cada uno de los ejercicios.			

La determinación de las derivadas no está limitada solamente a un punto de vista teórico, sino que hay una serie de aplicaciones vitales de las derivadas en ejemplos de la vida real. Las derivadas encuentran un lugar vital en la ingeniería, física e incluso en los negocios y la economía, etc. Algunas de las aplicaciones más notables de las derivadas se explican a continuación:

1. TASA DE VARIACIÓN: Esta es la aplicación más utilizada de las derivadas. Encuentra su aplicación en muchos problemas de la física. La tasa de variación en la localización de un punto te dará la velocidad de ese punto. De manera similar la tasa de cambio de la velocidad de un punto se conoce como la aceleración del mismo. La velocidad de un punto se despeja como, aquí x es el punto cuya velocidad será calculada y t representa el intervalo de tiempo.

2. PUNTO CRÍTICO: El punto crítico tiene una cantidad vasta de aplicaciones que incluyen la termodinámica, la física de la materia condensada, etc. Un punto crítico es aquel donde la derivada de la función es cero, no existe en absoluto.

3. DETERMINACIÓN DE VALORES MÍNIMOS Y MÁXIMOS: A este proceso se le denomina optimización. Existen una serie de problemas que requieren la determinación de los valores mínimos y máximos de alguna función tal como la determinación del menor costo, aproximación del menor tiempo, cálculo de mayor ganancia, etc. Puede existir un mínimo local / punto máximo que se denomina mínimo relativo / máximo punto o mínimo global / máximo punto que se le llama como mínimo absoluto / punto máximo. El máximo absoluto es uno, para todos los puntos del dominio de la función. Mientras que un punto máximo relativo es uno, para todos los puntos en un período abierto en las proximidades de **x** igual a **c**.

4. Método de Newton: Una aplicación digna de notar de las derivadas es el método de Newton, este es utilizado para rastrear las raíces de una ecuación en una cascada de etapas para que en cada paso de la solución encontremos una solución mejor y más adecuada como raíz de la ecuación. Este envuelve también el uso de algunos términos de las Series Taylor.

5. Aplicaciones en el ámbito del comercio: Existe una gran cantidad de lugares en el comercio donde las derivadas son requeridas. Dado que el objetivo final del comercio es el de maximizar las ganancias y minimizar las pérdidas, la teoría de máximos y mínimos puede utilizarse aquí para evaluar la respuesta correcta y así aumentar la productividad total del comercio. También resulta conveniente analizar el costo promedio de un artículo lo que puede ayudar al aumento de la ganancia.

6. Aproximación lineal: En una serie de ramas de la física, como es el caso de la óptica, la Aproximación lineal juega un papel vital. En este utilizamos una función lineal con el fin de encontrar la aproximación de cualquier función general. Esta es más comúnmente conocida como una aplicación de la recta tangencial al gráfico de cualquier función lineal.

Desarrollo

Observando la gran aplicación que tiene la derivada nos enfocaremos en la aplicación de valores mínimos y máximos de una función

¿Qué son los máximos y mínimos de una función? los máximos y mínimos se denominan extremos locales o extremos relativos de la función. Un máximo local o relativo en una función se presenta en un punto que es más alto que cualquier otro que esté cerca. Un mínimo local o relativo en una función se presenta en un punto que es más bajo que cualquier otro punto cercano.

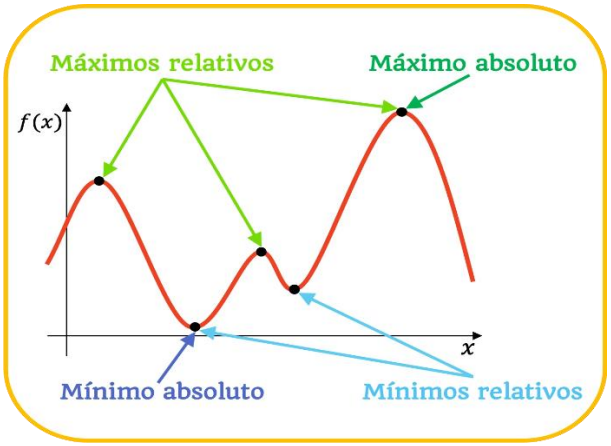


Figura 1.

Por lo tanto, si f es constante en un intervalo I entonces en todos los puntos de I alcanza un máximo relativo y un mínimo relativo.

Diremos que f alcanza o tiene un máximo si x si tiene un máximo relativo o absoluto en ese punto. De manera similar, diremos que f alcanza o tiene un mínimo en x si tiene un mínimo local o absoluto en ese punto.

Si una función es creciente en un intervalo $(a, c]$ y decreciente en $[c, b)$ entonces f tiene un máximo en c. (fig. 2)

Si una función es decreciente en un intervalo $(a, c]$ y creciente en $[c, b)$ entonces f tiene un mínimo en c. (fig. 3)

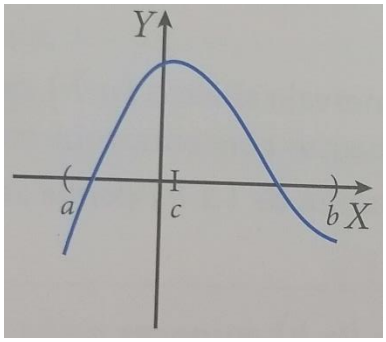


Figura 2

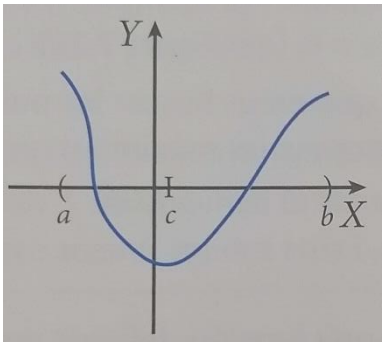


Figura 3

Los puntos máximos y mínimos de una función en un intervalo (a, b) solo pueden alcanzarse en puntos críticos.

Para obtener los máximos y mínimos de una función puede usarse dos criterios:

• Criterio de la **Primera derivada**.

• Criterio de la **Segunda derivada**.

En esta parcial nos enfocaremos a desarrollo el ***criterio de la segunda derivada***, para obtener los máximos y mínimos con este criterio se tiene que hacer el siguiente procedimiento:

1. *Hallar la Primera Derivada.*

2. *Hallar la Segunda derivada*.

3. *Se iguala a cero el resultado obtenido de la primera derivada, se resuelve la ecuación que se formando encontrando los valores críticos de "x".*

4. *Los valores de los puntos críticos de "x" se sustituyen en el resultado de la segunda derivada, obteniendo en cada sustitución un resultado numérico*.

A) *Si el resultado es mayor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Mínimo*.

B) *Si el resultado es menor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Máximo.*

5. *El valor de la ordenada (eje "y") se obtiene sustituyendo los valores del paso 3 en la función original*.

Ahora procederemos a explicar ciertos ejemplos usando el procedimiento ya mencionado.

Ejemplo 1

Encuentra el punto máximo y mínimo de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$

Solución:

Paso 1. *Hallar la Primera Derivada.*

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$	Se identifica que tipo de función corresponde y con ayuda de la Tabla 1 Fórmulas de derivación (*vea la sección de apertura*) seleccionando la fórmula 3
$f'(x) = \frac{1}{4}(4)x^{4-1} - \frac{1}{3}(3)x^{3-1} - 2x^{2-1}$	Aplicando la fórmula 3, la sustitución nos resulta como se señala en este paso, solo debemos recordar que cuando se multiplica un numero fraccionario por un numero entero y si son iguales el numero entero con el denominador y el numerador es 1, el resultado será uno, vea la siguiente multiplicación: $\frac{1}{5}(5) = 1$
$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$	Derivada resultante.

Paso 2. *Hallar la Segunda derivada*.

$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$	Se identifica que tipo de función es la derivada, recurriendo nuevamente a la Tabla 1 Fórmulas de derivación (*vea la sección de apertura*) seleccionando la fórmula 2 y 3
$f''(x) = 3x^{3-1} - 2x^{2-1} - 2x$	Aplicando la fórmula 3, en los dos primeros términos de la función y la fórmula 2 en el tercer término de la función, para obtener el resultado solo es cuestión de resolver las operaciones algebraicas resultantes.
$f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$	Derivada resultante.

Paso 3. *Se iguala a cero el resultado obtenido de la primera derivada, se resuelve la ecuación que se formando encontrando los valores críticos de "x".*

$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$	Seleccionamos la primera derivada
$x^3 - x^2 - 2x = 0$	Igualamos a cero la primera derivada
$x^3 - x^2 - 2x = 0$ $x(x^2 - x - 2) = 0$ $x(x+1)(x-2) = 0$	De acuerdo al orden de la expresión algebraica resultante es el número de valores críticos que vamos a obtener para "x", hay que recordar que el orden lo otorga el exponente, por lo tanto, la expresión resultante es de orden 3, proporcionando tres valores críticos que vamos a encontrar con ayuda de la factorización aplicando el procedimiento de factor común y luego factorización de una ecuación cuadrática.
$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2$	Los puntos críticos obtenidos son 0,-1 y 2

En esta lista de reproducción podrás encontrar diversos ejemplos de factorización de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.

https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dF11EWceCxzKtcaZidCkXXh

Paso 4. *Los valores de los puntos críticos de "x" se sustituyen en el resultado de la segunda derivada, obteniendo en cada sustitución un resultado numérico*.

A) *Si el resultado es mayor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Mínimo*.

B) *Si el resultado es menor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Máximo.*

$f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$	Los puntos críticos $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ se sustituyen en la segunda derivada y determinaremos si es un punto máximo o mínimo de acuerdo al resultado obtenido.
Cuando $x_1 = 0$ $f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$ $f''(0) = 3(0)^2 - 2(0) - 2$ $f''(0) = -2$	Sustituyendo el primer punto critico $x_1 = 0$ en la segunda derivada, el valor numérico obtenido es menor a cero por lo tanto estamos hablando que $x_1 = 0$ es la abscisa que otorga un punto **máximo**.

Cuando $x_2 = -1$ $f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$ $f''(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 2$ $f''(-1) = 3(1) + 2 - 2$ $f''(-1) = 3$	Sustituyendo el segundo punto critico $x_2 = -1$ en la segunda derivada, el valor numérico obtenido es mayor a cero por lo tanto estamos hablando que $x_2 = -1$ es la abscisa que otorga un punto **mínimo**.
Cuando $x_3 = 2$ $f''(x) = 3x^2 - 2x - 2$ $f''(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 2$ $f''(2) = 3(4) - 4 - 2$ $f''(-1) = 6$	Sustituyendo el tercer punto critico $x_3 = 2$ en la segunda derivada, el valor numérico obtenido es mayor a cero por lo tanto estamos hablando que $x_3 = 2$ es la abscisa que otorga un punto **mínimo**.

Paso 5. *El valor de la ordenada (eje "y") se obtiene sustituyendo los valores críticos del paso 3 en la función original*.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$	Los puntos críticos $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ se sustituyen en la función original (la función antes de aplicar la primera derivada) para determinar los valores de la ordenada correspondiente a cada punto crítico.
Cuando $x_1 = 0$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ $f(0) = \frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2$ $f(0) = 0$	Sustituyendo el primer punto critico $x_1 = 0$ en la función original, el valor numérico obtenido para la ordenada es 0
Cuando $x_2 = -1$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ $f(-1) = \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2$ $f(-1) = -\frac{5}{12}$	Sustituyendo el segundo punto critico $x_2 = -1$ en la función original, el valor numérico obtenido para la ordenada es $-\frac{5}{12}$

Cuando $x_3 = 2$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ $f(2) = \frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2$ $f(2) = -\frac{37}{6}$	Sustituyendo el primer punto critico $x_3 = 2$ en la función original, el valor numérico obtenido para la ordenada es $-\frac{37}{6}$
Punto Máximo $(0,0)$ Puntos Mínimos $\left(-1, -\frac{5}{12}\right) y \left(2, -\frac{37}{6}\right)$	Por lo tanto, las coordenadas de los puntos mínimos y máximo corresponden de la forma expresada.

Respuesta.

El punto máximo de la función es $(0,0)$, los puntos mínimos de la función son $\left(-1, -\frac{5}{12}\right)$ y $\left(2, -\frac{37}{6}\right)$.

Solo para cuestiones visuales realizaremos de manera rápida la gráfica de la función ya sea de manera manual o con apoyo de una graficadora virtual (GeoGebra) y ubicamos los puntos mínimos y máximos obteniendo:

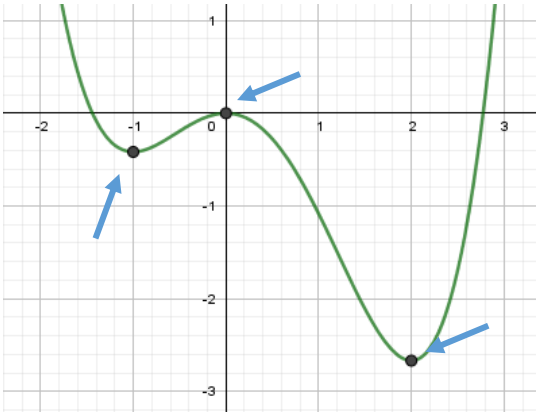


Figura 4

Ejemplo 2

Determina el punto máximo y mínimo de la siguiente función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Solución:

Paso 1. *Hallar la Primera Derivada.*

$f(x) = x^3 - 3x + 2$	Se identifica el tipo de función que corresponde seleccionamos de la Tabla 1 Fórmulas de derivación (*vea la sección de apertura*) las fórmulas 3, 2 y 1.
$f'(x) = 3x^{3-1} - 3$ $f'(x) = 3x^2 - 3$	Para el primer término se aplica la fórmula 3, que nos indica que el exponente baja como coeficiente multiplicando a "x", posteriormente al exponente de "x" se le resta la unidad. Para el segundo término se aplica la fórmula 2, por lo tanto, la derivada de -3x es 3. Para el tercer término se aplica la fórmula 1, la que nos menciona que la derivada de cualquier constante es cero, quedando eliminado el +2.
$f'(x) = 3x^2 - 3$	Derivada resultante.

Paso 2. *Hallar la Segunda derivada*.

$f'(x) = 3x^2 - 3$	Se identifica el tipo de función que corresponde la primera derivada y seleccionamos de la Tabla 1 Fórmulas de derivación (*vea la sección de apertura*) las fórmulas 3 y 1.
$f''(x) = (2)3x^{2-1}$ $f''(x) = 6x$	Para el primer término de la primera derivada se aplica la fórmula 3, que nos indica que el exponente baja como coeficiente multiplicando al 3, posteriormente al exponente de "x" se le resta la unidad quedando como resultado +1 pero no se escribe cuando esta cantidad es un exponente. Para el segundo término se aplica la fórmula 1, la que nos menciona que la derivada de cualquier constante es cero, quedando eliminado el -3.
$f''(x) = 6x$	Derivada resultante.

Paso 3. *Se iguala a cero el resultado obtenido de la primera derivada, se resuelve la ecuación que se formando encontrando los valores críticos de "x".*

$f'(x) = 3x^2 - 3$ $3x^2 - 3 = 0$	Se selecciona la primera derivada y se iguala a cero, obteniendo una expresión algebraica de segundo orden, por lo tanto, obtendremos dos puntos críticos.
$3x^2 - 3 = 0$ $3x^2 = 3$ $x^2 = \frac{3}{3}$ $x^2 = 1$ $x = \sqrt{1}$ $x = 1$	En esta ocasión procederemos a usar los procedimientos de despeje algebraico para encontrar el valor de x. El – 3 se pasa al otro lado de igual, convirtiéndose en +3. El 3 que multiplica a la variable "x" está multiplicando por lo tanto al otro lado de la ecuación pasará dividiendo. Ahora, observamos que solo nos falta pasar al otro lado de la ecuación al exponente cuadrado, por lo tanto, obtendremos una raíz cuadrada.
$x_1 = -1$ $x_2 = +1$	Recuerde que el resultado de la raíz en este caso nos otorga dos resultados uno positivo y otro negativo, ya que es una expresión de segundo orden la original debemos obtener dos puntos críticos.

Paso 4. *Los valores de los puntos críticos de "x" se sustituyen en el resultado de la segunda derivada, obteniendo en cada sustitución un resultado numérico*.

A) *Si el resultado es mayor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Mínimo*.

B) *Si el resultado es menor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Máximo.*

$f''(x) = 6x$	Seleccionamos el resultado de la segunda derivada y sustituiremos los puntos críticos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ para determinar cuál de los dos puntos críticos corresponde a un mínimo o máximo.
Cuando $x_1 = -1$ $f''(x) = 6x$ $f''(-1) = 6(-1)$ $f''(-1) = -6$	Sustituyendo el primer punto critico $x_1 = -1$ en la segunda derivada, el valor numérico obtenido es menor a cero por lo tanto estamos hablando que x_1 es la abscisa que otorga un punto **máximo**.
Cuando $x_2 = 1$ $f''(x) = 6x$ $f''(1) = 6(1) = 6$	Sustituyendo el segundo punto critico $x_2 = 1$ en la segunda derivada, el valor numérico obtenido es mayo a cero por lo tanto estamos hablando que x_2 es la abscisa que otorga un punto **mínimo**.

Paso 5. *El valor de la ordenada (eje "y") se obtiene sustituyendo los valores críticos del paso 3 en la función original*.

$f(x) = x^3 - 3x + 2$	Seleccionamos la función original y sustituiremos los puntos críticos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ para determinar las ordenadas que corresponden al punto máximo y mínimo.
Cuando $x_1 = -1$ $f(x) = x^3 - 3x + 2$ $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$ $f(-1) = -1 + 3 + 2$ $f(-1) = 4$	Sustituyendo el primer punto critico $x_1 = -1$ en la función original, el valor numérico obtenido para la ordenada es 4
Cuando $x_1 = 1$ $f(x) = x^3 - 3x + 2$ $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2$ $f(1) = 1 - 3 + 2$ $f(1) = 0$	Sustituyendo el segundo punto critico $x_2 = 1$ en la función original, el valor numérico obtenido para la ordenada es 0
Punto Máximo $(-1,4)$ Punto Mínimo $(1,0)$	Por lo tanto, las coordenadas de los puntos mínimos y máximo corresponden de la forma expresada.

Respuesta.

El punto máximo de la función es $(-1,4)$, los puntos mínimos de la función son $(1,0)$

Solo para cuestiones visuales realizaremos de manera rápida la gráfica de la función ya sea de manera manual o con apoyo de una graficadora virtual (GeoGebra) y ubicamos los puntos mínimos y máximos obteniendo:

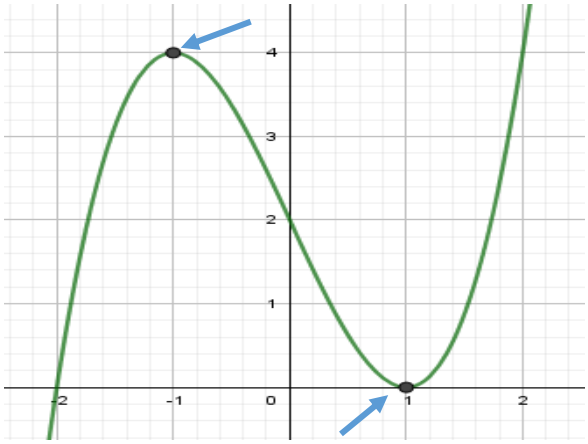


Figura 5

Ejemplo 3

Determina el punto máximo y mínimo de la siguiente función $f(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$

Solución:

Paso 1. *Hallar la Primera Derivada.*

$f(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$	Se identifica el tipo de función que corresponde seleccionamos de la Tabla 1 Fórmulas de derivación (*vea la sección de apertura*) las fórmulas 2 y 3.
$f'(x) = 18 - (3)\left(\frac{2}{3}\right)x^{3-1}$ $f'(x) = 18 - 2x^2$	Para el primer término se aplica la fórmula 2, por lo tanto, la derivada de 18x es 18. Para el segundo término se aplica la fórmula 3, que nos indica que el exponente baja como coeficiente multiplicando a $\frac{2}{3}$, posteriormente al exponente de "x" se le resta la unidad.
$f'(x) = 18 - 2x^2$	Derivada resultante.

Paso 2. *Hallar la Segunda derivada*.

$f'(x) = 18 - 2x^2$	Se identifica el tipo de función que corresponde la primera derivada y seleccionamos de la Tabla 1 Fórmulas de derivación (*vea la sección de apertura*) las fórmulas 1 y 3.
$f''(x) = -2(2)x^{2-1}$ $f''(x) = -4x$	Para el primer término se aplica la fórmula 1, la que nos menciona que la derivada de cualquier constante es cero, quedando eliminado el 18. Para el segundo término de la primera derivada se aplica la fórmula 3, que nos indica que el exponente baja como coeficiente multiplicando al 2, posteriormente al exponente de "x" se le resta la unidad quedando como resultado +1 pero no se escribe cuando esta cantidad es un exponente.
$f''(x) = -4x$	Derivada resultante.

Paso 3. *Se iguala a cero el resultado obtenido de la primera derivada, se resuelve la ecuación que se formando encontrando los valores críticos de "x".*

$f'(x) = 18 - 2x^2$ $18 - 2x^2 = 0$	Se selecciona la primera derivada y se iguala a cero, obteniendo una expresión algebraica de segundo orden, por lo tanto, obtendremos dos puntos críticos.
$18 - 2x^2 = 0$ $18 = 2x^2$ $\frac{18}{2} = x^2$ $x^2 = 9$ $x = \sqrt{9}$ $x = 3$	En esta ocasión procederemos a usar los procedimientos de despeje algebraico para encontrar el valor de x. El$-2x^2$ se pasa al otro lado de igual, convirtiéndose en $2x^2$. El 2 que multiplica a la variable "x" está multiplicando por lo tanto al otro lado de la ecuación pasará dividiendo quedando $\frac{18}{2}$ que es igual a 9. Ahora, observamos que solo nos falta pasar al otro lado de la ecuación al exponente cuadrado, por lo tanto, obtendremos una raíz cuadrada.
$x_1 = -3$ $x_2 = +3$	Recuerde que el resultado de la raíz en este caso nos otorga dos resultados uno positivo y otro negativo, ya que es una expresión de segundo orden la original debemos obtener dos puntos críticos.

Paso 4. *Los valores de los puntos críticos de "x" se sustituyen en el resultado de la segunda derivada, obteniendo en cada sustitución un resultado numérico*.

A) *Si el resultado es mayor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Mínimo*.

B) *Si el resultado es menor a cero entonces el valor que se sustituyo es la abscisa (eje "x") que forma parte del punto Máximo.*

$f''(x) = -4x$	Seleccionamos el resultado de la segunda derivada y sustituiremos los puntos críticos $x_1 = -31$ y $x_2 = 3$ para determinar cuál de los dos puntos críticos corresponde a un mínimo o máximo.
Cuando $x_1 = -3$ $f''(x) = -4x$ $f''(-3) = -4(-3)$ $f''(-3) = 12$	Sustituyendo el primer punto critico $x_1 = -3$ en la segunda derivada, el valor numérico obtenido es mayor a cero por lo tanto estamos hablando que x_1 es la abscisa que otorga un punto **mínimo**.
Cuando $x_2 = 3$ $f''(x) = 6x$	Sustituyendo el segundo punto critico $x_2 = 3$ en la segunda derivada, el valor numérico obtenido es menor a cero por lo tanto estamos hablando que x_2 es la abscisa que otorga un punto **máximo**.

$f''(3) = -4(3)$ $f''(3) = -12$	

Paso 5. *El valor de la ordenada (eje "y") se obtiene sustituyendo los valores críticos del paso 3 en la función original*.

$f(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$	Seleccionamos la función original y sustituiremos los puntos críticos $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$ para determinar las ordenadas que corresponden al punto máximo y mínimo.
Cuando $x_1 = -3$ $f(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$ $f(-3) = 18(-3) - \frac{2}{3}(-3)^3$ $f(-3) = -54 - \frac{2}{3}(-27)$ $f(-3) = -54 + 18 = -36$	Sustituyendo el primer punto critico $x_1 = -3$ en la función original, el valor numérico obtenido para la ordenada es -36
Cuando $x_1 = 3$ $f(x) = 18x - \frac{2}{3}x^3$ $f(3) = 18(3) - \frac{2}{3}(3)^3$ $f(-3) = 54 - \frac{2}{3}(27)$ $f(-3) = 54 - 18 = 36$	Sustituyendo el segundo punto critico $x_2 = 3$ en la función original, el valor numérico obtenido para la ordenada es 36
Punto Máximo $(-3, -36)$ Punto Mínimo $(3,36)$	Por lo tanto, las coordenadas de los puntos mínimos y máximo corresponden de la forma expresada.

Respuesta.

El punto máximo de la función es $(-3,36)$, los puntos mínimos de la función son $(3,36)$

Solo para cuestiones visuales realizaremos de manera rápida la gráfica de la función ya sea de manera manual o con apoyo de una graficadora virtual (GeoGebra) y ubicamos los puntos mínimos y máximos obteniendo:

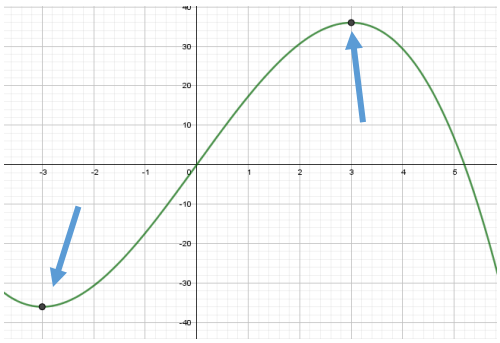


Figura 6

Con frecuencia en la vida, nos enfrentamos con el problema de encontrar la mejor manera de hacer algo, por ejemplo:

- Un granjero necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia.
- Un médico desea seleccionar la menor dosis de un medicamento que curará cierta enfermedad.
- Un fabricante le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos.
- Una embotelladora le gustaría rediseñar sus envases pero que el nuevo diseño no altere el volumen de la presentación seleccionada.

Para los problemas de aplicación en donde se requieren encontrar los máximos y mínimos (optimización) se recomienda hacer lo siguiente:

a) Haga un dibujo del problema

b) Asigne las variables idóneas para las cantidades importantes

c) Escriba una función que se maximizará o minimizará, en términos de las variables, utilice las condiciones del problema para eliminar todas las variables. Hasta quedar en términos de una variable.

d) Encuentre los máximos o mínimos de la función con el criterio de la segunda derivada.

e) Revise los resultados.

Ejemplo 4

Se tiene una lámina circular que tiene de radio 70 cm. De la que se desea cortar un rectángulo de la mayor área posible. ¿Qué medidas debe tener el rectángulo? ¿Cuál debe ser el área máxima? Algunas formas de cortar el rectángulo en círculo.

Nota: si no usamos un método matemático podemos variar en el dibujo del rectángulo inscrito, por lo que podemos obtener diferentes medidas y no poder determinar el área máxima solicitada, en la figura 7 podemos observar diferentes ejemplos sobre el trazo del rectángulo:

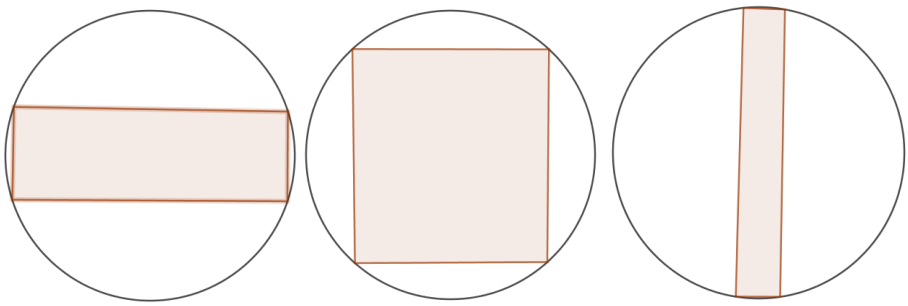


Figura 7

Por lo tanto, para obtener un resultado exacto usaremos el procedimiento de máximos y mínimos.

a) Haga un dibujo del problema.

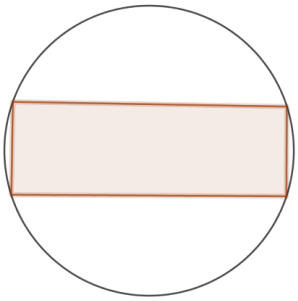


Figura 8

b) ***Asigne las variables idóneas para las cantidades importantes***

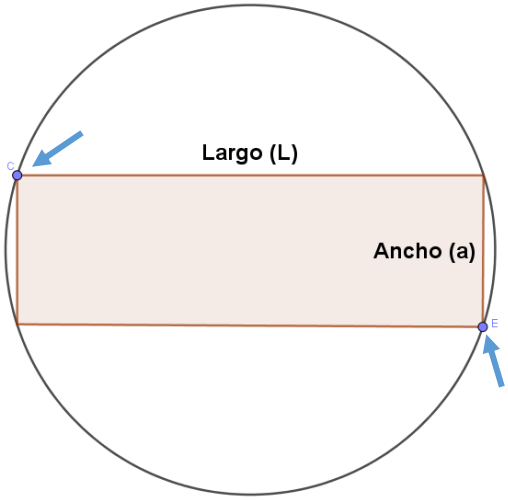


Figura 9

Considere a los puntos **C** y **E** extremos de la recta del diámetro de la circunferencia, **L** el largo del rectángulo y **a** el ancho del rectángulo.

c) ***Escriba una función que se maximizará o minimizará, en términos de las variables, utilice las condiciones del problema para eliminar todas las variables. Hasta quedar en términos de una variable.***

Sabemos que el radio de la circunferencia es 70 cm, por lo tanto, el diámetro de la circunferencia es:

$$D = 2r = 2(70) = 140cm$$

Puesto que el diámetro está conformado por la recta que forma la unión de los puntos extremos **C** y **E**, dividiendo así al rectángulo en dos triángulos rectángulos, por lo que usaremos el recurso del **Teorema de Pitágoras**.

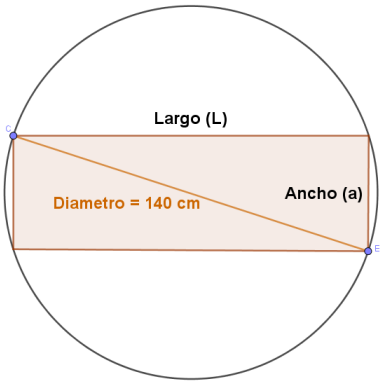


Figura 10.

En esta lista de reproducción podrás encontrar diversos ejemplos del Teorema de Pitágoras.

https://www.youtube.com/watch?v=2yfkEAt2ew0

Recordando el Teorema de Pitágoras que nos menciona:

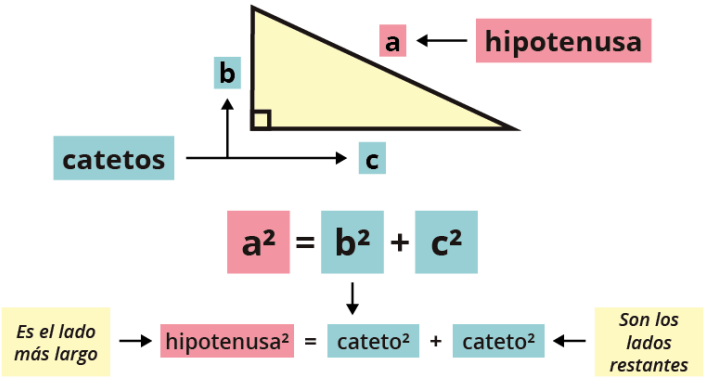


Figura 11

Relacionando los valores obtenidos con los datos del Teorema de Pitágoras, tenemos la siguiente relación:

Hipotenusa = diámetro = 140 cm
Cateto 1 = Largo (L)
Cateto 2 = Ancho (a)

Sustituyendo los valores en la fórmula del Teorema de Pitágoras obtenemos:

$$(cateto\ 1)^2 + (cateto\ 2)^2 = (hipotenusa)^2$$

$$(Largo)^2 + (ancho)^2 = (140\ cm)^2$$

$$L^2 + a^2 = 19{,}600\ cm^2$$

De acuerdo al resultado obtenido tenemos dos incógnitas que son el Largo y el ancho, por lo tanto, necesitaremos usar otra fórmula que esté muy relacionada, en este caso, usaremos la formula del área del rectángulo, ya que el ejercicio nos solicita área del rectángulo máxima:

$$Área\ del\ rectángulo\ (Ar) = (Largo)(ancho)$$

Entonces para poder usar la formula anterior es necesario despejar de la formula resultante del Teorema de Pitágoras $L^2 + a^2 = 19{,}600\ cm^2$, el largo o el ancho, en esta ocasión práctica decidimos despejar la variable del ancho, quedando:

$$a^2 = 19{,}600 - L^2$$

$$a = \sqrt{19{,}600 - L^2}$$

Ya despejado el ancho de la formula del Teorema de Pitágoras, se procede a sustituirse el valor en la fórmula del área del rectángulo y se procede a realizar las operaciones algebraicas y aritméticas que se obtengan.

$$Área\ del\ rectángulo(Ar) = (Largo)(ancho)$$

Si $a = \sqrt{19{,}600 - L^2}$, entonces:

$$Ar = (L)\left(\sqrt{19{,}600 - L^2}\right)$$

La función remarcada con amarillo es a la aplicaremos los procedimientos del criterio de la segunda derivada.

d) ***Encuentre los máximos o mínimos de la función con el criterio de la segunda derivada.***

$Ar = (L)\left(\sqrt{19{,}600 - L^2}\right)$	Se identifica el tipo de función que corresponde seleccionamos de la Tabla 1 Fórmulas de derivación (*vea la sección de apertura*) la fórmula 8, ya que es una multiplicación de funciones.

$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{L} \quad \boldsymbol{v} = \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{L} \qquad \boldsymbol{\mu}' = \mathbf{1}$	Para poder aplicar la fórmula 8 es necesario identificar los valores de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{v}$ Haremos la derivada de $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{v}$ para posteriormente usar dichos valores en la sustitución de la fórmula 8 de la Tabla 1.
$\boldsymbol{v} = \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $\boldsymbol{v} = (19{,}600 - L^2)^{\frac{1}{2}}$ $\boldsymbol{v}' = \frac{1}{2}(19{,}600 - L^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2L)$	Para encontrar la derivada de $\boldsymbol{\mu}$**,** recordemos que la derivada de una función el resultado siempre será la unidad. En el caso de la derivada de $\boldsymbol{v}$ es aplicar el procedimiento correspondiente de la fórmula 9 de la Tabla 1.
$Ar = [L]\left[\frac{1}{2}(19{,}600 - L^2)^{\frac{1}{2}-1}(-2L)\right] + \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $Ar = [L]\left[\frac{-2L}{2}(19{,}600 - L^2)^{\frac{1}{2}-1}\right] + \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $Ar = [L]\left[\frac{-2L}{2}(19{,}600 - L^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $Ar = [L]\left[-L(19{,}600 - L^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $Ar = -L^2\left[(19{,}600 - L^2)^{-\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $Ar = \frac{-L^2}{(19{,}600 - L^2)^{\frac{1}{2}}} + \sqrt{19{,}600 - L^2}$ $Ar = \frac{-L^2}{\sqrt{19{,}600 - L^2}} + \sqrt{19{,}600 - L^2}$	Ya que tenemos los valores de $\boldsymbol{\mu}'$ y $\boldsymbol{v}'$ procedemos sustituir los valores en la fórmula 8 que es la principal, resolviendo las operaciones aritméticas y algebraicas correspondientes. Primero multiplicamos el $\frac{1}{2}$ por -2L, quedando como se muestra en el según procedimiento, aprovechamos para hacer la resta de $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ En el segundo paso realizamos la división de $\frac{-2L}{2} = -L$, ya que el dos entre dos es igual a uno y aprovechamos para multiplicar L por -L, quedando - L^2 Por leyes de exponentes, cuando tenemos un valor negativo, se puede convertir en una fracción pasando los valores del exponente negativo al denominador sin cambiar el valor del exponente, solo cambia el signo. Recuerde que un exponente fraccionario se puede convertir en una raíz.

$$Ar = \frac{-L^2}{\sqrt{19{,}600 - L^2}} + \sqrt{19{,}600 - L^2}$$

$$0 = \frac{-L^2}{\sqrt{19{,}600 - L^2}} + \sqrt{19{,}600 - L^2}$$

Ahora igualamos a cero el valor de la primera derivada.

$$\frac{L^2}{\sqrt{19{,}600 - L^2}} = \sqrt{19{,}600 - L^2}$$

Ahora el término negativo lo pasaremos al otro lado de la igualdad convirtiéndose de esta manera en positivo.

$$L^2 = \left(\sqrt{19{,}600 - L^2}\right)\left(\sqrt{19{,}600 - L^2}\right)$$

Seguidamente el termino que se encuentra dividiendo lo pasamos al otro lado de la igualdad multiplicando.

$$L^2 = \left(\cancel{\sqrt{19{,}600 - L^2}}\right)^{\cancel{2}}$$

Multiplicando los términos podemos eliminar la raíz cuadrada ya que son términos iguales y se puede elevar a la potencia cuadrada.

$$L^2 = 19{,}600 - L^2$$

Ahora el término -L^2 se puede cambiar al otro extremo de la igualdad con la finalidad de reducir los términos semejantes, al convertirse en positivo se suman los términos.

$$2L^2 = 19{,}600$$

$$L^2 = \frac{19{,}600}{2}$$

$$L = \sqrt{\frac{19{,}600}{2}}$$

$$L = 98.99$$

Ahora se procede a despejar el valor de L.

$$a = \sqrt{19{,}600 - L^2}$$

$$a = \sqrt{19{,}600 - (98.99)^2}$$

$$a = \sqrt{19{,}600 - (98.99)^2}$$

$$a = 98.99$$

Ya con el valor de L=98.99 podemos obtener el valor del ancho sustituyendo en la formula $a = \sqrt{19{,}600 - L^2}$ y resolviendo las operaciones aritméticas resultantes.

e) Revise los resultados.

Respuesta.

Para darle solución al ejercicio es necesario responder las preguntas expuestas que son:

¿Qué medidas debe tener el rectángulo?

$$\boldsymbol{L = 98.99\ cm\ y\ a = 98.99\ cm}$$

¿Cuál debe ser el área máxima?

$$Ar = (Largo)(ancho)$$

$$Ar = (98.99)(98.99)$$

$$Ar = 9{,}799.02\ \approx 9{,}800\ cm^2$$

En este video podrás encontrar una explicación de la derivada de $\frac{\mu}{v}$

https://www.youtube.com/watch?v=YiemOYGTlX4

En este video podrás encontrar una explicación de la derivada de $\boldsymbol{\mu^n}$

https://www.youtube.com/watch?v=m_5-WS9Nd68&t=83s

Ejemplo 5

Con una cartulina rectangular de 40x15 cm se requiere construir una caja abierta cortando en cada esquina un cuadrado de lado x y doblando los lados hacia arriba. Encuentre el valor de x para el cual el volumen de la caja sea máximo.

a) Haga un dibujo del problema

Procedemos a realiza un dibujo del planteamiento del problema, obteniendo lo siguiente:

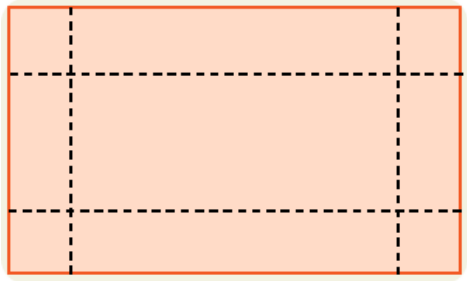
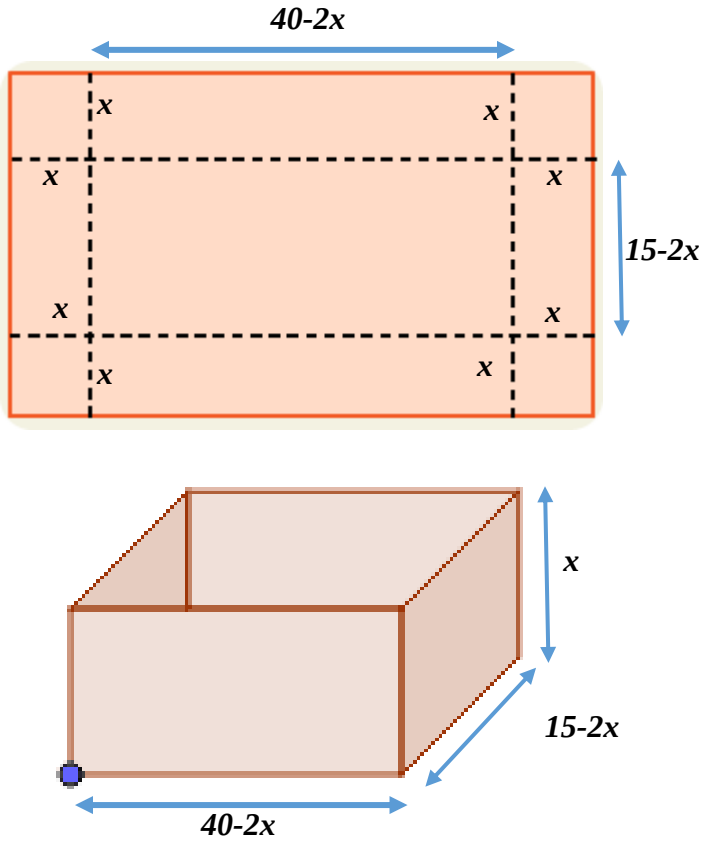


Figura 12

b) Asigne las variables idóneas para las cantidades importantes.

Figura 13



c) Escriba una función que se maximizará o minimizará, en términos de las variables, utilice las condiciones del problema para eliminar todas las variables. Hasta quedar en términos de una variable.

En este caso ejercicio la función que nos ayudara a resolver el ejercicio es la de volumen, recordemos que para determinar el volumen de la caja es similar al volumen del prisma:

$$Volumen\ (V) = Largo(L)\ X\ Ancho(a)\ X\ Altura(h)$$

Relacionando las variables, obtenemos que:

$$Largo(L) = 40 - 2x$$
$$Ancho(a) = 15 - 2x$$
$$Altura(h) = x$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen, adquirimos:

$$V = (40 - 2x)(15 - 2x)(x)$$

Aplicando los principios de multiplicación algebraica podemos determinar que:

$$V = (40 - 2x)(15 - 2x)(x)$$

$$V = (40 - 2x)(15x - 2x^2)$$

$$V = 600x - 80x^2 - 30x^2 + 4x^3$$

$$V = 4x^3 - 110x^2 + 600x$$

d) Encuentre los máximos o mínimos de la función con el criterio de la segunda derivada.

Ya obtenida la función con la que vamos a trabajar, es importante realizar los procedimientos del criterio de la segunda derivada, iniciamos el proceso obteniendo la primera derivada y segunda derivada de la expresión algebraica del volumen:

$$\mathrm{V(x)} = 4\mathrm{x}^3 - 110\mathrm{x}^2 + 600\mathrm{x}$$
$$\mathrm{V'(x)} = 4(3)\mathrm{x}^{3-1} - 110(2)\mathrm{x}^{2-1} + 600$$
$$\mathrm{V'(x)} = 12\mathrm{x}^2 - 220\mathrm{x} + 600$$

$$\mathrm{V''(x)} = 12(2)\mathrm{x}^{2-1} - 220$$
$$\mathrm{V''(x)} = 24\mathrm{x} - 220$$

Se iguala la primera derivada a cero para encontrar los puntos críticos:

$$V' = 12x^2 - 220x + 600$$
$$12x^2 - 220x + 600 = 0$$

Podemos observar que todos los coeficientes de la expresión resultante son múltiplos de tres, podemos simplificarla dividiendo todo entre 3, quedando:

$$3x^2 - 55x + 150 = 0$$

Necesitamos factorizar el trinomio de grado dos, por tal motivo recurriremos a la aplicación de la formula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde $a = 3, b = 55\ y\ c = 150$, ahora solo sustituimos en la formula y resolviendo las operaciones aritméticas obtendremos los puntos críticos del volumen:

$$x = \frac{-(-55) \pm \sqrt{(-55)^2 - 4(3)(150)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{55 \pm \sqrt{3025 - 1800}}{6}$$

$$x = \frac{55 \pm \sqrt{1225}}{6}$$

$$x = \frac{55 \pm 35}{6}$$

De donde;

$$x_1 = \frac{55 - 35}{6} = 15 \qquad x_2 = \frac{55 + 35}{6} = \frac{10}{3}$$

De estás dos soluciones, descartamos $x_1 = 15$ porque em muestra cartulina no podemos cortar en cada esquina un cuadrado de lado 15 cm. Así, $x_2 = \frac{10}{3}$ es nuestro único candidato. Ahora sustituimos x_2 en la segunda derivada:

$$V''(x) = 24\left(\frac{10}{3}\right) - 220$$
$$V''(x) = -140$$
$$-140 < 0$$

Por lo tanto, -140 es menor a cero, donde la función V tiene un máximo en $x = \frac{10}{3}$, es decir, la caja de volumen máximo se obtiene al cortar un cuadrado de $\frac{10}{3}cm$ de lado.

e) Revise los resultados.

Para poder determinar las dimensiones de la caja es necesario sustituir $x = \frac{10}{3}$ en:

$$Largo(L) = 40 - 2x = 40 - 2\left(\frac{10}{3}\right) = 33.33cm$$

$$Ancho(a) = 15 - 2x = 15 - 2\left(\frac{10}{3}\right) = 8.33cm$$

$$Altura(h) = \frac{10}{3}cm$$

Determinando así el volumen de la caja:

$$Volumen\ (V) = (33.33)(8.33)(3.33) = 925.46cm^3$$

I.- Encuentra con el criterio de la segunda derivada los valores máximos y mínimos de los siguientes ejercicios, realiza la gráfica correspondiente.

El objetivo de estos ejercicios es fortalecer los aprendizajes obtenidos, estos ejercicios cuentan con la respuesta para que vayas cotejando con tus procedimientos, no tienen representación en tu calificación del parcial.

$a)\ f(x) = x^3 - 4x$

Respuesta. Máx. (-1.155,3.07), Mín. (1.155, -3.07)

$b)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - 6x$

Respuesta. Máx. (-1.5,5), Mín. (4,-22.6)

$c)\ f(x) = x^2 - 5$

Respuesta. Mín. (0, -5)

II.- Resuelve los siguientes problemas.

d) En una fábrica se ha hecho un estimativo donde el costo total de utilización de sus instalaciones está dado por $C(x) = 5000 - 15x + \frac{1}{2}x^2$, donde x es el número de unidades producidas. ¿A qué nivel de producción será mínimo el costo medio por unidad?

Respuesta. El costo mínimo de producción será cuando se produzcan 15 unidades equivalente a $4887.5 pesos

e) Halle dos números cuya suma sea 18, sabiendo que el producto de uno por el cuadrado del otro sea un máximo.

Respuesta. 6 y 12

Utiliza la siguiente lista de cotejo con el objetivo de señalar en qué fase habrá de darle un repaso a los aprendizajes.

Saber	Si	No	Observaciones
Identifico correctamente las fórmulas de derivación para la primera y segunda derivada según corresponda.			
Realizo los procedimientos aritméticos y algebraicos resultantes de las fórmulas de derivación			
Encuentro los puntos críticos y los sustituyo adecuadamente en la segunda derivada			
Determino correctamente de acuerdo a las características de mayor que o menor que cero los puntos máximos y mínimos			
Interpreto correctamente la solución numérica con lo solicitado de los problemas.			

Cierre

Para concluir, te invito a que resuelvas las siguientes preguntas:

¿Cuál es la definición de la derivada?

_____
_____
_____

¿Por qué es importante el estudio para determinar los puntos máximos y minimos de una función?

_____
_____
_____

¿Cuáles son los procedimientos que tienes que realizar para encontrar los puntos máximos y minimos de una funcion por el criterio de la segunda derivada?

_____
_____
_____

Investiga los procedimientos del Criterio de la primera derivada. ¿Cuál es la diferencia entre el criterio de la primera y segunda derivada?

_____
_____
_____

Recordando el ejercicio de la caja, ¿crees que pudiera haberlo resuelto de manera correcta sin usar el procedimiento de maximos y minimos?_____

¿porque?_____
_____
_____

Apertura

APRENDIZAJE 2.- RESUELVE ECUACIONES LOGARÍTMICAS CON AYUDA DE SUS PROPIEDADES.

Contesta lo siguiente.

¿Qué es un logaritmo?

_____

_____

_____

¿Para qué se utilizan los logaritmos?

_____

_____

_____

Un poco de…

John Napier, barón de Merchiston; Merchiston Castle, Escocia, 1550 - id., 1617) Matemático y teólogo escocés. Protestante convencido, criticó enconadamente a la Iglesia católica y abogó por la persecución de "papístas, ateos y neutrales" en una carta dirigida al rey, Jacobo I, en la que le dedicaba su obra teológica *A plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John*. A pesar de la notoriedad que le procuraron las más de treinta ediciones de dicha obra, el nombre de Napier había de quedar por siempre ligado al desarrollo de los logaritmos, un método matemático ideado con el objeto de simplificar el cálculo numérico que iba a ejercer una enorme influencia en todos los campos de la matemática aplicada. Napier tardó algo más de veinte años en madurar sus ideas iniciales, que publicó finalmente en 1614. Poco después, el matemático inglés Henry Briggs se desplazó a Escocia y convenció a Napier para modificar la escala inicial usada por éste; nacieron así los logaritmos de base 10, forma en la que se impusieron en toda Europa.

Desarrollo

Los logaritmos son una forma especial del empleo de los exponentes. Ya que siempre tendrán su equivalente a una exponencial y por ello podemos decir que son *relaciones trascendentes*, entre las que se encuentran la logarítmica y exponencial, dependiendo de la función que se tenga.

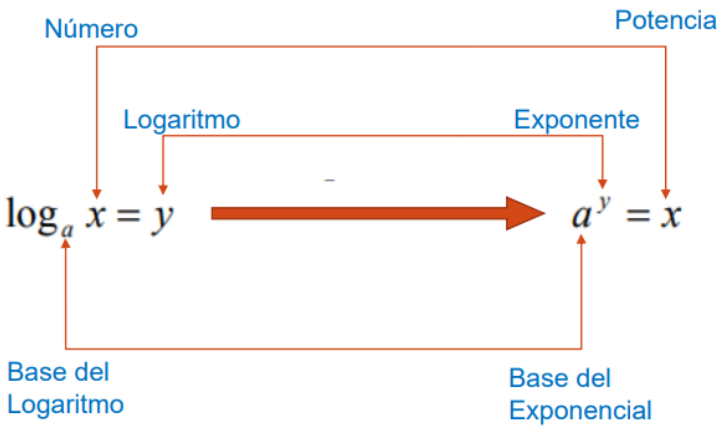


Figura 14. “Conversión de un logaritmo a exponencial y viceversa”

Por ejemplo, un logaritmo de 9 en base 3 que es igual a 2 sería:

$$\log_3 9 = 2$$

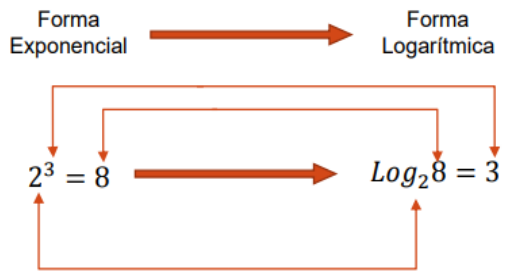
El logaritmo expresado significa que 3 elevado a 2 es igual 9:

$$3^2 = 9$$

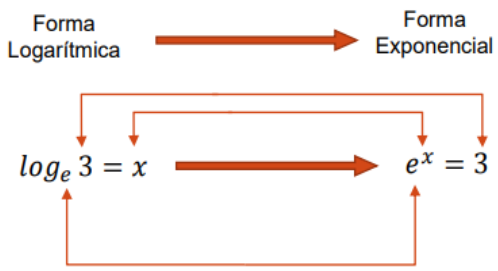
Ejemplo 6

Con ayuda del esquema de la figura 14, convierte los logaritmos a exponenciales o viceversa según sea el caso.

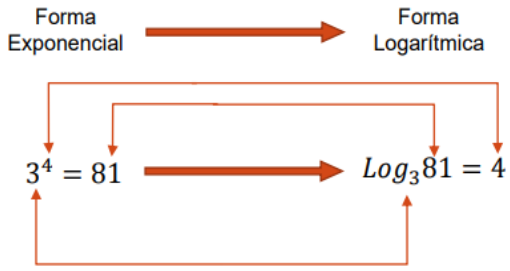
a) Escribe en su forma logaritmo $2^3 = 8$



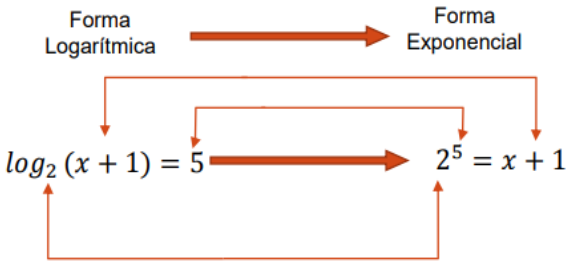
b) Escribe en su forma exponencial $log_e\, 3 = x$



c) Escribe en su forma logaritmo $3^4 = 81$



d) Escribe en su forma exponencial $log_2\,(x+1) = 5$



Para poder graficar un logaritmo solo se tiene que convertir el logaritmo a un exponencial y realizar el procedimiento para hallar una gráfica tradicional, solo que para este tema se asignaran los valores a la variable "***y***" para encontrar los valores de la variable "***x***".

Ejemplo 7

Grafica las siguientes funciones:

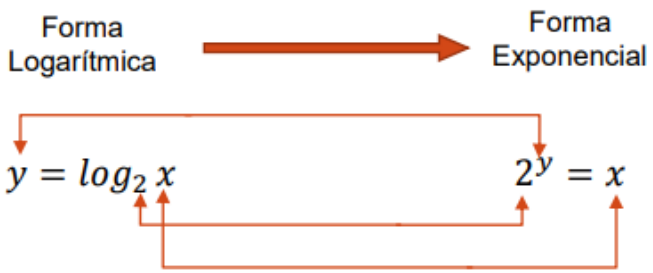
a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$

Solución.

a) $y = \log_2 x$

Primero debemos encontrar la forma exponencial del logaritmo.



Ya en la forma exponencial encontraremos los valores para graficar, pero en esta ocasión los valores que marcaremos son los de "y" que sustituiremos en la forma exponencial para determinar los valores de "x", cabe mencionar que los valores que determinamos para "y" son en un rango de números negativos a positivos, en está ocasión seleccionamos el intervalo de -5 a 5.

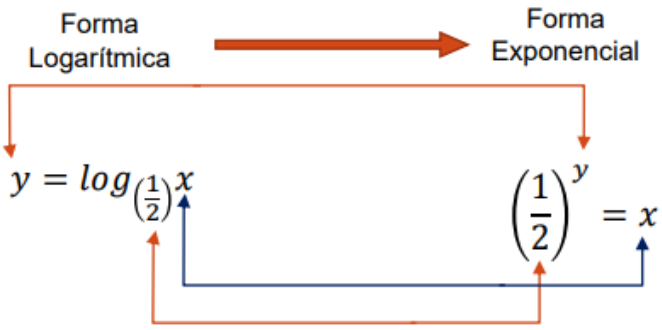
x	y
$2^y = 2^{-5} =$ 0.03125	-5
$2^y = 2^{-4} =$ 0.0625	-4
$2^y = 2^{-3} =$ 0.125	-3
$2^y = 2^{-2} =$ 0.25	-2
$2^y = 2^{-1} =$ 0.5	-1
$2^y = 2^0 =$ 1	0
$2^y = 2^1 =$ 2	1
$2^y = 2^2 =$ 4	2
$2^y = 2^3 =$ 8	3
$2^y = 2^4 =$ 16	4
$2^y = 2^5 =$ 32	5

Ubicamos los puntos en el plano cartesiano para obtener la gráfica resultando.

Figura 15.

b) $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$

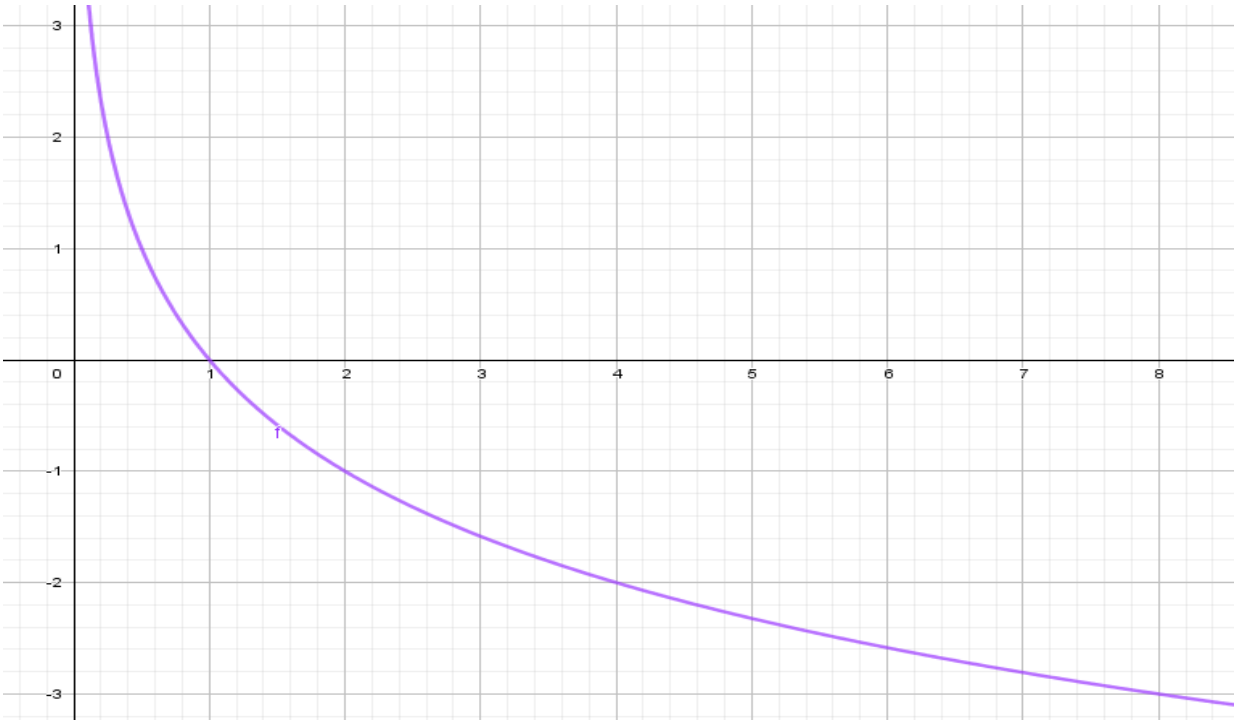
Repetimos los mismos pasos, primero debemos encontrar la forma exponencial:



Ya en la forma exponencial encontraremos los valores para graficar, pero en esta ocasión los valores que marcaremos son los de “y” que sustituiremos en la forma exponencial para determinar los valores de “x”, cabe mencionar que los valores que determinamos para “y” son en un rango de números negativos a positivos, en esta ocasión seleccionamos el intervalo de -3 a 3.

x	y
$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	-3
$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	-2

$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$ 2	-1
$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} =$ 1	0
$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} =$ 0.5	1
$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2} =$ 0.25	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^{y} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} =$ 0.125	3



PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS.

Las siguientes propiedades vienen como consecuencia de que el logaritmo es un exponente. Siempre y cuando $a > 0$, $a \neq 1$.

PROPIEDAD 1

$\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$

EJEMPLOS: 1) $\log_6 1 = 0$ 2) $\log_2 1 = 0$ 3) $\ln 1 = 0$

PROPIEDAD 2

$\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$

EJEMPLOS: 1) $\log_5 5 = 1$ 2) $\log 10 = 1$ 3) $\ln e = 1$

PROPIEDAD 3

$\log_a a^x = x$ porque $a^x = a^x$

EJEMPLOS: 1) $\log_4 4^{10} = 10$

2) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

Las propiedades de los logaritmos son reglas que tienen gran relevancia. Puedes revisar las demostraciones de estas reglas en la siguiente liga:

PROPIEDAD 4

$a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$

EJEMPLOS: 1) $3^{\log_3 4} = 4$

2) $5^{\log_5 \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

3) $10^{\log \sqrt{3}} = \sqrt{3}$

3) $e^{ln\ 2} = 2$

PROPIEDAD 5.

Estas propiedades se pueden leer de izquierda a derecha y viceversa. Sean M, N y a números positivos con a ≠ 1. Sea r cualquier número real.

I. $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

II. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

III. $\log_a M^r = r \log_a M$

IV. $\log_a M = \log_a N$ si y sólo si $M = N$

Ejemplo 8

Maximice o minimice según sea el caso los siguientes logaritmos usando las propiedades correspondientes.

a) Escriba en un solo logaritmo $\log_a 5 + 2\log_a x + 4\log_a y^3$

$$\log_a 5 + 2\log_a x + 4\log_a y^3 = \log_a 5 + \log_a x^2 + \log_a (y^3)^4$$

El 2 y 4 suben como exponentes por la Prop.5(III) leída de derecha a izq.

$$= \log_a 5 + \log_a x^2 + \log_a y^{12}$$

Debido a que en el paso anterior nos queda una potencia de otra potencia, usamos la leyes de los exponentes y multiplicamos 3(4)=12

$$= \log_a (5)(x^2)(y^{12})$$

Usamos la Prop. 5(I) de derecha a izquierda, la cual nos dice que si se suman es una multiplicación

$$= \log_a 5x^2y^{12}$$

Resolvemos la multiplicación algebraica tradicional del paso anterior , obteniendo así la respuesta final.

b) Escriba en varios logaritmos: $\log_8 \left(\frac{b^2}{(a+1)^3}\right)$

$$\log_8 \left(\frac{b^2}{(a+1)^3}\right) = \log_8 (b^2) - \log_8 (a+1)^3$$

Usamos la Propiedad 5(II) de izquierda a derecha que permite convertir a una división en una resta de dos logaritmos.

$$= 2\log_8 b - 3\log_8 (a+1)$$

Usamos la Propiedad 5(III) de izquierda a derecha, que permite bajar los exponentes a un número que multiplica al logaritmo encontrando así el resultado final.

c) Encuentre el valor número con apoyo de las propiedades: $\log_8 2 + \log_8 4$

$$\begin{aligned} \log_8 2 + \log_8 4 &= \log_8(2)(4) \\ &= \log_8(2)(4) \\ &= \log_8(8) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Usamos la Propiedad 5(I) de derecha a izquierda que permite convertir la suma de logaritmos en una multiplicación, para luego multiplicar (2)(4) = 8

Usamos la Propiedad 2, la cual nos explica que si la base del logaritmo es igual al resultado del logaritmo obtenemos como respuesta la unidad.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Para resolver las ecuaciones logarítmicas usaremos la forma exponencial de la ecuación y las propiedades de los logaritmos. Todo dependerá del tipo de ecuación que vayamos a resolver y de las habilidades algebraicas que tenga desarrollada el estudiante para obtener la respuesta correcta.

Ejemplo 9

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

$a)\ \log_3(4x-2)=2$

$$3^2 = 4x - 2$$

$$9 = 4x - 2$$

$$9 + 2 = 4x$$

$$11 = 4x$$

$$x = \frac{11}{4}$$

Se observa la ecuación y se visualiza que si aplicamos primero las propiedades logarítmicas se complica el ejercicio, por lo que se procede a convertir el logaritmo a una función exponencial, respetando los criterios ya establecidos, resolviendo las operaciones aritméticas y algebraicas de despeje que corresponda.

$b)\ \log_5(x+6)+\log_5(x+2)=1$

$$\log_5(x+6)\,(x+2) = 1$$

$$5^1 = (x+6)(x+2)$$

$$5 = x^2 + 2x + 6x + 12$$

$$x^2 + 2x + 6x + 12 - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$

Donde a=1, b=8 y c=7

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se observa la ecuación, se realiza el mismo procedimiento del ejemplo anterior con la finalidad que el ejercicio no se dificulte, se aplica las propiedades del logaritmo para convertir una suma en multiplicación, para posteriormente convertir el logaritmo a un exponente.

Seguidamente se realizan las operaciones aritméticas y algebraicas correspondientes hasta encontrar un trinomio, para resolverlo usaremos la formula general donde a=1, b=8 y c=7, encontrando así dos valores para x.

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 6}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-8 - 6}{2} = -7$$

De los dos posibles resultados tenemos que determinar sí los dos son correctos o puede ser que uno solo sea correcto, por lo que procedemos a sustituir $x_1 = -1$ y $x_2 = -7$ en el logaritmo del ejercicio inicial.

Sustituimos en el logaritmo inicial:

Cuando $x_1 = -1$

$$\log_5(x + 6) + \log_5(x + 2) = 1$$
$$\log_5(-1 + 6) + \log_5(-1 + 2) = 1$$
$$\log_5(5) + \log_5(1) = 1$$
$$\log_5(5)\,(1) = 1$$
$$\log_5(5) = 1$$
$$1 = 1$$

Despues de sustituir y de resolver las operaciones aritméticas, usamos la Propiedad 5(I) de derecha a izquierda, recuerde que esta propiedad convierte una suma en una multiplicación de logaritmos.

Seguidamente aplicamos la Propiedad 2, la que explica que si la base del logaritmo es igual al

Cuando $x_2 = -7$

$$\log_5(x + 6) + \log_5(x + 2) = 1$$
$$\log_5(-7 + 6) + \log_5(-7 + 2) = 1$$
$$\log_5(-1) + \log_5(-5) = 1$$

Logaritmo de un negativo no existe, porque no hay ningún exponente para que elevado sea dicho número negativo.

$c)\ \log 2x - \log(x - 3) = 1$

$$\log 2x - \log(x - 3) = 1$$

$$\log \frac{2x}{(x - 3)} = 1$$

$$10^1 = \frac{2x}{x - 3}$$

$$10 = \frac{2x}{x - 3}$$

$$10(x - 3) = 2x$$

$$10x - 30 = 2x$$
$$10x - 2x = 30$$

Para resolver está ecuación primero aplicaremos las propiedades logarítmicas iniciando con la Propiedad 5(II) de derecha a izquierda, convirtiendo la resta en una división de logaritmos.

Nota: cuando el logaritmo no tiene escrita la base, se considera siempre que es base 10.

Ahora que se tiene un solo logaritmo se convierte a exponencial, seguidamente resolveremos las operaciones aritméticas y algebraicas correspondientes hasta encontrar el valor de x.

$$8x = 30$$
$$x = \frac{30}{8}$$

$$x = \frac{15}{4}$$

$d)\ \log_4(t+2) = \log_4 8$

$$\log_4(t+2) = \log_4 8$$

$$(t+2) = 8$$

$$t+2 = 8$$

$$t = 8-2$$

$$t = 6$$

En está ecuación podemos observar que podemos aplicar directamente la Propiedad 5 (IV), si dos logaritmos de la misma base están igualados, solo se igualan los números logarítmicos y se resuelve la ecuación obtenida respetando los procedimientos aritméticos y algebraicos.

Propiedad 5 (IV)

$$\log_4 M = \log_a N$$
$$M = N$$

Actividades de aprendizaje

I.- Completa la siguiente tabla:

FORMA EXPONENCIAL	FORMA LOGARÍTMICA
$\mathbf{2^3 = 8}$	
	$\log_4 256 = 4$
$\mathbf{5^5 = 3125}$	
	$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$

II.- Gráfica los siguientes logaritmos.

a) $y = \log_3 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$

c) $y = \log_9(x+7)$

III. Expresa en varios logaritmos los siguientes casos.

a) $\log_4 \frac{45}{(21)(66)}$

Respuesta: $\log_4 45 - \log_4 21 + \log_4 66$

b) $\log_2 (6.23)(8.5)^3$

Respuesta: $\log_2 6.23 + 3\log_2 8.5$

c) $\log_9 (x)^{12}$

Respuesta: $12 \log_9 x$

El objetivo de estos ejercicios es fortalecer los aprendizajes obtenidos, estos ejercicios cuentan con la respuesta para que vayas cotejando con tus procedimientos, no tienen representación en tu calificación del parcial.

IV. Expresa en un solo logaritmo los siguientes casos.

a) $\log(xy) - 2\log\left(\frac{x}{y}\right)$

Respuesta: $\log\left(\frac{y^3}{x}\right)$

b) $2\log(a-b) - \log(a^2 - b^2)$

Respuesta: $\log\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$

c) $\log_a 5 + 2\log_a x + 4\log_b y^3$

Respuesta: $\log_a 5x^2y^{12}$

IV. Resuelve las siguientes ecuaciones de logaritmos.

a) $\log_2(4x-1) = 3$

Respuesta: $x = \frac{9}{4}$

b) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

Respuesta: $x = 2$

Utiliza la siguiente lista de cotejo con el objetivo de señalar en qué fase habrá de darle un repaso a los aprendizajes.

Saber	Si	No	Observaciones
Realizo las conversiones de logaritmos a exponenciales adecuadamente.			
Determino adecuadamente la tabla de los valores para obtener la gráfica de los logaritmos.			
Realizo el trazo de la gráfica del logaritmo de manera ordenada y presentable.			
Identifico y utilizo las propiedades de los logaritmos de manera eficiente empleando los principios de las operaciones aritméticas y algebraicas según corresponda.			
Resuelvo correctamente las ecuaciones de los logaritmos, empleando las propiedades de los logaritmos, usando los procedimientos matemáticos correspondientes			

Cierre

Para concluir, te invito a que resuelvas las siguientes preguntas:

¿Qué medidas puedes tomar para mejorar tu desempeño respecto a los logaritmos?

_____

_____

_____

¿Qué aplicaciones pueden tener los logaritmos dentro de nuestra vida?

_____

_____

_____

¿Qué tema se te agrado más y cual se te dificulto?

_____

_____

_____

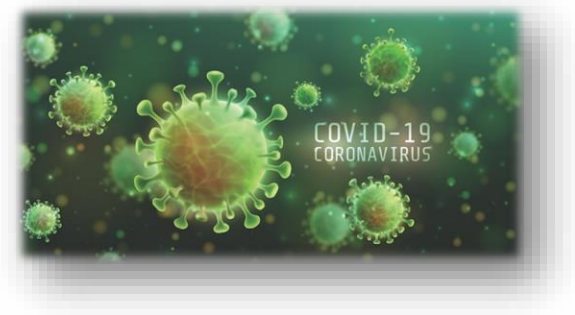
Apertura

APRENDIZAJE 3.- RESUELVE ECUACIONES EXPONENCIALES CON AYUDA DE SUS PROPIEDADES.

En la naturaleza y en la vida social existen numerosos fenómenos que se rigen por leyes de crecimiento exponencial. Tal sucede, por ejemplo, en el crecimiento de las poblaciones, comportamiento reproducción de una bacteria, la carga eléctrica de un capacitor, las sustancias radiactivas siguen una ley exponencial en su ritmo de desintegración para producir otros tipos de átomos y generar energía y radiaciones ionizantes, entre otras aplicaciones.

Se llama **función exponencial** de **base** a aquella cuya forma genérica es $f(x)=a^x$, siendo a un número positivo distinto de 1. Por su propia definición, toda función exponencial tiene por dominio de definición el conjunto de los números reales R.

La función exponencial puede considerarse como la inversa de la función logarítmica.



La función exponencial fue descubierta por el matemático y físico suizo Leonhard Euler, para saber más sobre él, te invito a que visites su bibliografía, escaneando el siguiente código.

Desarrollo

Una **ecuación exponencial** es aquella en la que aparecen exponenciales, es decir, potencias cuyos exponentes son expresiones en las que aparece la incógnita, x.

Se llama función exponencial de base a, a aquella cuya forma es $f(x)=a^x$, siendo un número positivo distinto de 1. Por lo tanto, en una función exponencial la variable independiente es el exponente de la función. Por su propia definición, el dominio de toda función exponencial es el conjunto de los números reales R.

Según el valor de la base:

- Si $0 < a < 1$, entonces $f(x) = a^x$ es decreciente, si el exponente aumenta entonces el valor de a^x disminuye.
- Si $a > 1$ entonces $f(x) = a^x$ es creciente, si el exponente aumenta, entonces el valor de a^x también aumenta.

La base no puede ser igual a 0 porque cualquier numero exponencial de base cero es igual a 1, ósea $y=1^x$, su valor es constantemente igual a 1, con lo que gráficamente es una función constante $y = 1$.

La base no puede ser negativa porque el valor de la función será positivo si x es par y negativo si el exponente es impar.

El método de resolución consiste en conseguir una igualdad de exponenciales con la misma base para poder igualar los exponentes. Para ello, utilizaremos las propiedades de los exponentes.

LEYES DE LOS EXPONENTES.

Las leyes de los exponentes son el conjunto de reglas establecidas para resolver las operaciones matemáticas con potencias.

La potencia o potenciación consiste en la multiplicación de un número por sí mismo varias veces.

En esta liga podrás encontrar diferentes ejemplos sobre la aplicación de las leyes de exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$
7. $a^0 = 1, \quad a \neq 0$

PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES.

Para toda función exponencial de la forma f(x) = a^x, se cumplen las siguientes propiedades generales:

- La función aplicada al valor cero es siempre igual a 1:
  f (0) = a^0 = 1.

- La función exponencial de 1 es siempre igual a la base:
  f (1) = a^1 = a.

- La función exponencial de una suma de valores es igual al producto de la aplicación de dicha función aplicada a cada valor por separado.
  $f(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = (a^{x_1})(a^{x_2}) = [f(x_1)][f(x_2)]$

- La función exponencial de una resta es igual al cociente de su aplicación al minuendo dividida por la función del sustraendo:
  $f(x_1 - x_2) = a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = \frac{f(x_1)}{f(x_2)}$

GRÁFICAS DE EXPONENCIALES.

Para realizar la gráfica de las funciones exponenciales se realiza el mismo método para graficar una función cualquiera, la cual es sustituir valores en la función diferentes valores a la variable x, pero se recomienda usar siempre valores consecutivos enteros como positivos y negativos.

Utilizaremos la tabla que se realiza normalmente para obtener los valores de “y” y posteriormente ubicaremos los puntos en el plano cartesiano para dibujar la gráfica resultante.

Se recomienda que la tabla sea siempre simétrica, es decir, si inicias con -4 debes llegar al 4 o si inicias con -10 debes llegar al 10, recuerda que tú decides la cantidad para iniciar tu gráfica.

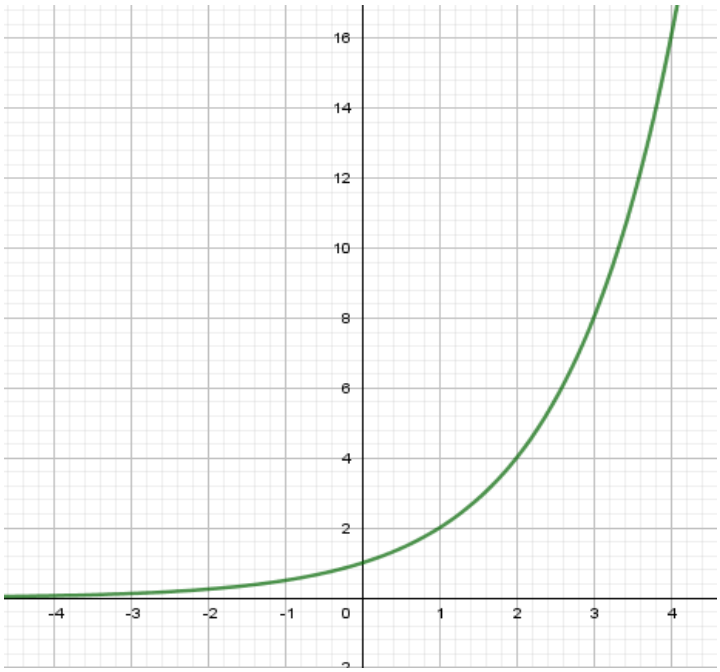
Ejemplo 10

Realiza las gráficas de las siguientes expresiones exponenciales.

a) $f(x) = 2^x$

Primero realizaremos la tabla de valores de la función correspondiente, en este ejemplo proponemos iniciar en - 4 y terminare en 4 por lo tanto, en lugar de escribir x sustituiremos el valor que le corresponda. Una vez obtenidos los puntos se ubican en el plano cartesiano y se unen para poder trazar la recta.

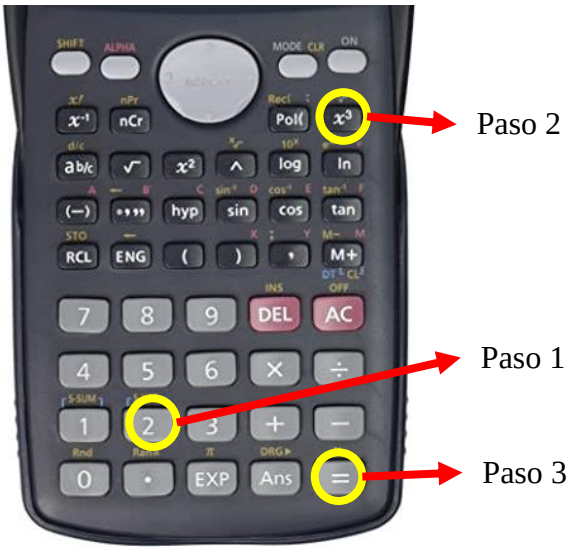
x	y
-4	$f(-4) = 2^{-4} =$ 0.0625
-3	$f(-3) = 2^{-3} =$ 0.125
-2	$f(-2) = 2^{-2} =$ 0.25
-1	$f(-1) = 2^{-1} =$ 0.5
0	$f(0) = 2^{0} =$ 1
1	$f(1) = 2^{1} =$ 2
2	$f(2) = 2^{2} =$ 4
3	$f(3) = 2^{3} =$ 8
4	$f(4) = 2^{4} =$ 16



En breve describiremos como usar la calculadora para encontrar el primer valor de la tabla, debes seguir los siguientes pasos:

En esta liga podrás encontrar ejemplos sobre el uso de la calculadora con exponenciales para poder obtener los datos de la gráfica.

Vamos a repetir el mismo procedimiento, pero solo hay que cambiar la cantidad que se sustituye en la calculadora, veamos el procedimiento que haremos para determinar el valor cuando x=3, en este caso, existe ya una tecla para elevar la base al cubo.

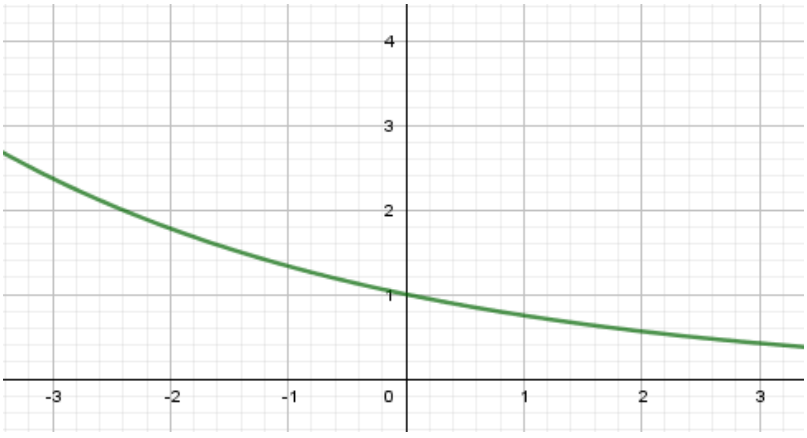


Si no cuentas con una calculadora física, puedes usar el siguiente código para poder descargar una app de calculadora científica totalmente gratis.

$b)\ f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x}$

Primero realizaremos la tabla de valores de la función correspondiente, en este ejemplo proponemos iniciar en - 3 y terminare en 3 por lo tanto, en lugar de escribir x sustituiremos el valor que le corresponda. Una vez obtenidos los puntos se ubican en el plano cartesiano y se unen para poder trazar la recta.

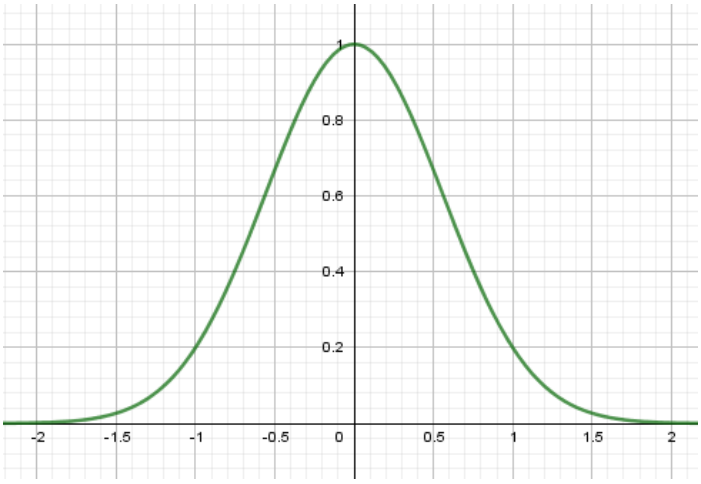
x	y
-3	$f(-3) = \left(\frac{3}{4}\right)^{(-3)} =$ 2.37
-2	$f(-2) = \left(\frac{3}{4}\right)^{(-2)} =$ 1.78
-1	$f(-1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{(-1)} =$ 1.33
0	$f(0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{(0)} =$ 1
1	$f(1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{(1)} =$ 0.75
2	$f(2) = \left(\frac{3}{4}\right)^{(2)} =$ 0.56
3	$f(3) = \left(\frac{3}{4}\right)^{(3)} =$ 0.42



$c)\ f(x) = 5^{-(x^2)}$

Primero realizaremos la tabla de valores de la función correspondiente, en este ejemplo proponemos iniciar en – 1.5 y terminare en 1.5 por lo tanto, en lugar de escribir x sustituiremos el valor que le corresponda. Una vez obtenidos los puntos se ubican en el plano cartesiano y se unen para poder trazar la recta.

x	y
-1.5	$f(-1.5) = 5^{-(1.5^2)} =$ 0.03
-1	$f(-1) = 5^{-(1^2)} =$ 0.2
-0.5	$f(-0.5) = 5^{-(-0.5^2)} =$ 0.67
0	$f(0) = 5^{-(0^2)} =$ 1
0.5	$f(0.5) = 5^{-(0.5^2)} =$ 0.67
1	$f(1) = 5^{-(1^2)} =$ 0.2
1.5	$f(1.5) = 5^{-(1.5^2)} =$ 0.03



ECUACIONES EXPONENCIALES.

Se llama ecuación exponencial a aquella en la que la incógnita aparece como exponente. Un ejemplo de ecuación exponencial sería $a^x = b$.

Para resolver estas ecuaciones se suelen utilizar dos métodos alternativos:

- **Igualación de la base**: consiste en aplicar las propiedades de las potencias para lograr que en los dos miembros de la ecuación aparezca una misma base elevada a distintos exponentes:
  $a^x = a^y$.

  En tales condiciones, la resolución de la ecuación proseguiría a partir de la igualdad x = y.

- **Cambio de variable**: consiste en sustituir todas las potencias que figuran en la ecuación por potencias de una nueva variable, convirtiendo la ecuación original en otra más fácil de resolver.
  $2^{2x} - 3(2^x) - 4 = 0 \overset{2^x=U}{\Longleftrightarrow} U^2 - 3U - 4 = 0$
  luego se deshace el cambio de variable.

Por otra parte, un sistema de ecuaciones se denomina exponencial cuando en alguna de sus ecuaciones la incógnita aparece como exponente. Para la resolución de sistemas de ecuaciones exponenciales se aplican también, según convenga, los métodos de igualación de la base y de cambio de variable.

Ejemplo 11

Resuelve las siguentes ecuaciónes exponenciales:

$a)\ 2^{x-1} = 2^{3x}$

Para resolver está ecuación vamos a recurrir a usar la alternativa 1 ya que son la misma base, recuerriendo a los principios básicos de despeje algebraicos para hallar la solución.

$$x - 1 = 3x$$

$$3x - x = -1$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Se igualan los exponentes, una vez escrita la ecuación se determina colocar de un lado de la igualdad todas las variables "x", el lado seleccionado es donde se encuentra la mayor cantidad de la variable, la x que está sumando pasa restando a 3x.

Luego solo se despeja la variable x para encontrar el valor de la ecuación, por lo que el 2 que está multiplicando pasará dividiendo.

$b)\ 5^{1-3x} = 5^{-1}$

Para resolver está ecuación vamos a recurrir a usar la alternativa 1 ya que son la misma base, recuerriendo a los principios básicos de despeje algebraicos para hallar la solución.

$$1 - 3x = -1$$

Se igualan los exponentes.

$$1 = -1 + 3x$$

Se pasa el -3x al otro extremo para que sea positivo, siempre hay que cuidar que la variable a despejar siempre sea positiva.

$$1 + 1 = 3x$$

El -1 pasa al otro extremo cambiando de signo negativo a positivo.

$$3x = 2$$

El 3 esta multiplicando, por lo que pasa dividiendo.

$$x = \frac{2}{3}$$

$c)\ 4^{3t} = 8^{t-1}$

Como las bases no son iguales, procedemos a igualarlas con ayuda de los procedimientos de aritmética, se buscan las equivalencias con bases iguales y se determina que:

$$4 = 2^2\ y\ 8 = 2^3$$

Ahora se procede a sustituir las equivalencias en la ecuación exponencial, obteniendo:

$$(2^2)^{3t} = (2^3)^{t-1}$$

Ahora usaremos la segunda ley de exponentes, potencia de una potencia, en cada uno de los términos de la expresión:

$$(2)^{(2)(3t)} = (2)^{(3)(t-1)}$$

$$(2)^{6t} = (2)^{3t-3}$$

Potencia de una potencia $(x^m)^n = x^{mn}$

Ya que las bases son iguales podemos usar el procedimiento de igualación de los exponentes, como en los ejemplos anteriores para determinar el resultado correspondiente:

$$6t = 3t - 3$$
$$6t - 3t = -3$$
$$3t = -3$$
$$t = \frac{-3}{3}$$
$$t = -1$$

$d)\ 2(9^x) = 162$

Primero vamos a despejar al termino exponencial, el 2 que está multiplicando pasara dividiendo, obteniendo:

$$2(9^x) = 162$$
$$9^x = \frac{162}{2}$$
$$9^x = 81$$

Ahora, como las bases no son iguales, procedemos a igualarlas con ayuda de los procedimientos de aritmética, se buscan las equivalencias con bases iguales y se determina que:

$$9 = 3^2\ y\ 81 = 3^4$$

Se procede a sustituir las equivalencias en la ecuación exponencial, obteniendo:

$$(3^2)^x = 3^4$$

Ahora usaremos la segunda ley de exponentes, potencia de una potencia, en el primer término de la ecuación:

$$(3)^{(2)(x)} = 3^4$$
$$3^{2x} = 3^4$$

Potencia de una potencia
$(x^m)^n = x^{mn}$

Ya que las bases son iguales podemos usar el procedimiento de igualación de los exponentes, como en los ejemplos anteriores para determinar el resultado correspondiente:

$$2x = 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

I.- Gráfica las siguientes funciones exponenciales.

$a)\ y = 7^x$

$b)\ y = -\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$

$c)\ y = \left(\frac{2}{5}\right)^{x}$

El objetivo de estos ejercicios es fortalecer los aprendizajes obtenidos, estos ejercicios cuentan con la respuesta para que vayas cotejando con tus procedimientos, no tienen representación en tu calificación del parcial.

II.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

$a)\ 9(27^x) = 27$

Respuesta: $x = \frac{1}{3}$

$b)\ 5\left(\frac{5^{5x}}{25^x}\right) = 25$

Respuesta: $x = \frac{1}{3}$

$c)\ 2^{x+1} + 5(2^x) = 28$

Respuesta: $x = 2$

$d)\ 25^x = \frac{1}{25}$

Respuesta: $x = -1$

$e)\ (6^{-x})^2 = 216$

Respuesta: $x = -\frac{3}{2}$

Utiliza la siguiente autoevaluación con apoyo de la lista de cotejo que se proporciona con la finalidad de que identifiques en qué fase tendrá que realizar un repaso a los aprendizajes adquiridos.

Saber	Si	No	Observaciones
Determino adecuadamente la tabla de los valores para obtener la gráfica de las funciones exponenciales.			
Realizo el trazo de la gráfica de manera ordenada y presentable.			
En las ecuaciones exponenciales identifico las bases de los exponentes cuando no son iguales.			
Resuelvo correctamente las ecuaciones exponenciales, empleando las leyes de exponentes.			
Realizo el procedimiento matemático aritmético y algebraico según corresponda para obtener los resultados de las ecuaciones exponenciales.			

Cierre

Para concluir, te invito a que resuelvas las siguientes preguntas:

¿Qué medidas puedes tomar para mejorar tu desempeño respecto a las ecuaciones exponenciales?

_____

_____

_____

¿Te costo trabajo buscar las equivalencias entre las bases de los exponentes?

_____

_____

_____

¿Qué aplicaciones pueden tener las expresiones exponenciales dentro de nuestra vida?

_____

_____

_____

¿Qué tema se te agrado más y cual se te dificulto?

_____

_____

_____

Evaluación

Aprendizaje 1.- Resuelve ejercicios contextualizados de Máximos y Mínimos aplicando el procedimiento de la segunda derivada.

Valor ***40%***

I.- Encuentra los valores máximos y mínimos de las siguientes funciones.

$a)\ f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$

$b)\ f(x) = x^3 - 3x^2$

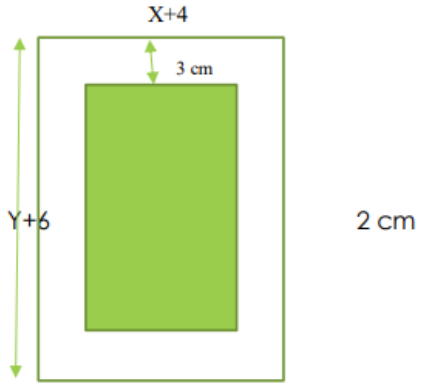
II.- Resuelve los siguientes problemas de aplicación de máximos y mínimos, recuerda agregar tu procedimiento de manera clara y ordenada.

c) Una nueva funda para celulares, se puede producir a un costo de $10 pesos cada una. Los precios de venta indican que, si se venden a "*x*" pesos cada funda, al mes se tendrían ventas de (50-x) fundas. ¿Cuántas fundas se deben vender, para obtener la ganancia máxima?

d) Se quiere construir una caja cerrada con base cuadrada empleando 400cm^2 de material. ¿Qué dimensiones debe tener dicha caja para que su volumen sea máximo?

Nota: Recuerde que la caja es cerrada, por lo tanto; Área = área de la base + área de la tapa+ área de las cuatro superficies laterales.

e) Las páginas de un libro deben contener un área impresa de 216 cm2, con imágenes superior e inferior de 3cm y márgenes laterales de 2cm (observa la figura). Encuentra las dimensiones de la página para que su área total sea mínima.



Aprendizaje 2.- Resuelve ecuaciones logarítmicas con ayuda de sus propiedades.

Valor ***30%***

I.- Desarrolla los siguientes logaritmos con el uso de las propiedades.

$a)\ \log_p \sqrt{\frac{(33)(22)(14)}{92}}$

$b)\ \log(6.25)\,(8.4)^6$

II.- Desarrolla los siguientes logaritmos con el uso de las propiedades.

$c)\ 2\log 3 + 4\log 2 - 2\log 12$

$d)\ -\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8 + 2\log 5$

III.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas de manera ordenada agregando el procedimiento correspondiente.

$e)\ \log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5$

$f)\ \log_5 x + \log_5 30 = 3$

$g)\ \log_4 8 - 3\log_4(x-6) + 3 = 0$

Aprendizaje 3.- Resuelve ecuaciones exponenciales con ayuda de sus propiedades.

Valor ***30%***

I.- Grafica las siguientes expresiones exponenciales, recuerda anexarlas.

$a) y = \left(\frac{7}{2}\right)^{x}$

$b) y = 2^{0.5x}$

II.- Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales de manera ordenada agregando el procedimiento correspondiente.

$c)\ 2^{4x+1} = 16^{x+3}$

$d)\ (27^{3x})^{3} = 729$

$e)\ 4^{y+1} + 2^{y+3} = 320$

COLEGIO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS DEL ESTADO DE CAMPECHE
MATEMÁTICAS APLICADA
LISTA DE COTEJO - 3P

ENERO 2022

NOMBRE DEL ALUMNO:			
CARRERA:			**PARCIAL: 3**
CICLO ESCOLAR 2021 - 2022	**SEMESTRE:** SEXTO	**GRUPO:**	**CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y SUBSIDIARIOS:** **CÁLCULO** **Máximos y mínimos.** **RELACIONES TRASCENDENTES** **Logarítmica (propiedades, función, ecuación y métodos de solución)** **Exponencial (propiedades, función, ecuación y métodos de solución)**
PRODUCTO ESPERADO: 1.- Resolución ejercicios de Máximos y Mínimos. 2.- Resolución de ejercicios Logarítmicos. 3.- Resolución de ejercicios Exponenciales.			

PLAN DE EVALUACIÓN			
NOMBRE	**TIPO**	**ALCANCE**	**PONDERACIÓN**
▪ **Resolución de ejercicios**	**SUMATIVA**	**HETEROEVALUACIÓN**	**100%**

CRITERIOS A EVALUAR	CUMPLE		
	BUENO	REGULAR	MALO
Ponderación 40%			
Encuentra la primera derivada y segunda derivada correctamente.			
Realiza el procedimiento correspondiente para encontrar los valores máximos y mínimos de las funciones.			
Obtiene la función de las aplicaciones de máximos y mínimos,			
Realizando el procedimiento correspondiente para obtener la respuesta de los problemas de aplicación de máximos y mínimos.			
Ponderación 30%			
Utiliza adecuadamente las propiedades logarítmicas para simplificar o maximizar una expresión logarítmica.			
Convierte las funciones logarítmicas a exponenciales y viceversa, usando el procedimiento adecuado para hallar la solución de las ecuaciones logarítmicas.			
Resuelve las ecuaciones logarítmicas usando los procedimientos aritméticos y algebraicos de manera ordenada, clara y precisa.			
Ponderación 30%			
Determina adecuadamente los valores para realizar la gráfica de las funciones exponenciales y traza la gráfica de manera ordenada y presentable.			
Resuelve correctamente las ecuaciones exponenciales, empleando las leyes de exponentes e igualando las bases de los exponentes cuando no son iguales según sea el caso.			
Realiza el procedimiento matemático aritmético y algebraico según corresponda para obtener los resultados de las ecuaciones exponenciales de manera ordenada, clara y precisa.			
Entrega en el tiempo establecido			

RESULTADO DE LA EVALUACIÓN: _____

NOMBRE Y FIRMA DE QUIEN EVALUÓ:	**OBSERVACIONES:**

Pedro Flavio Cano Alarcón (2014), Asómate a las Matemáticas Aplicada, Progreso Editorial.

Elena de Oteyza Emma Lam, Carlos Hernández Ángel Carrillo (2013), Cálculo diferencial e integral, Pearson Educación de México.

Benjamín Garza Olvera (1990), Matemáticas Aritmética y Algebra, Colección DGETI

Samuel FuenLabrada (2008), Calculo diferencial Tercera edición, Mcgraw-HILL / Interamericana Editores-

DICTALIA
https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recursos?search=maximos%20y%20minimos